

Schrijf boven elk vel je naam, studentnummer en studierichting (W, N of I).
Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken.

1. We beschouwen een rij onafhankelijke continue stochasten $X_1, X_2, \dots$, die allen verdeeld zijn volgens de dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{als } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

De onderdelen van deze opgave zijn allemaal los van elkaar te maken!

- (a) Wat is de kans dat van de tien stochasten $X_1, \dots, X_{10}$ er 2 of meer een waarde krijgen kleiner dan $\frac{1}{4}$? Als het u niet lukt om $\mathbb{P}(X_1 < \frac{1}{4})$ te bepalen, neem dan aan dat $\mathbb{P}(X_1 < \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.
- (b) Definieer $Y = X_1^{3/2}$. Geef de verdeling van Y .
- (c) Definieer

$$S = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

Benader de kans dat S groter is dan 65, dus $\mathbb{P}(S \geq 65)$.

2. We leggen de 52 kaarten van een goed geschud pak naast elkaar op een tafel. We definiëren X als het aantal rijtjes met opeenvolgende kaarten van dezelfde kleur (schoppen, harten, ruiten of klaveren; er zijn 13 kaarten van elke kleur). Voorbeeld: in het rijtje kaarten met kleuren RRHRRSKKH zitten 6 rijtjes van opeenvolgende kaarten met dezelfde kleur.
- (a) Bereken $\mathbb{P}(X = 4)$.
- (b) Bereken $\mathbb{E}(X)$. Hint: merk op dat X gelijk is aan het aantal kleurwisselingen in de rij plus één.
3. We gooien met een eerlijke munt, en zetten een pion een stap vooruit bij kop, en twee stappen vooruit bij munt. Als we de i^{de} “worp” dus definiëren als U_i (dus $\mathbb{P}(U_i = 1) = \mathbb{P}(U_i = 2) = 1/2$), dan is de positie van de pion na de n^{de} worp gegeven door

$$X_n = \sum_{i=1}^n U_i.$$

We zijn geïnteresseerd in de gebeurtenissen

$$A_k = \{\exists n \geq 1 : X_n = k\},$$

voor $k \geq 1$.

- (a) Zijn de gebeurtenissen A_1 en A_2 onafhankelijk? Bewijs uw uitspraak!
- (b) Definieer $p_k = \mathbb{P}(A_k)$. Laat zien dat voor $k \geq 1$,

$$p_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Merk op dat $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 2/3$; kunt u dit op een eenvoudige manier verklaren? Hint voor het berekenen van p_k : leid met behulp van conditionering een recursieve betrekking af voor het rijtje p_k .

- (c) Verklaar waarom $\mathbb{P}(A_{k+m} \mid A_k) = \mathbb{P}(A_m)$. Definieer $B_k = 1$ wanneer A_k optreedt, en anders $B_k = 0$ (B_k is dus de indicatorfunctie van de gebeurtenis A_k). Bewijs dat

$$\text{Cov}(B_k, B_{k+m}) = \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right).$$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Tabel 1: *Right tail probabilities* $1 - \Phi(a) = P(Z \geq a)$ *of the* $N(0, 1)$ -*variabe* Z .

Full solutions:

1a Er geldt

$$\mathbb{P}(X_1 \leq \frac{1}{4}) = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3}{2} \sqrt{x} dx = \left[x^{3/2} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}.$$

Het aantal van de tien stochasten dat dus een waarde kleiner dan $\frac{1}{4}$ krijgt, is $\text{Bin}(10, \frac{1}{8})$ verdeeld. De kans op 2 of meer is dus:

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{1}{8}\right)^1 \left(\frac{7}{8}\right)^9 = 0.3611.$$

In het geval een student (ten onrechte) $\mathbb{P}(X_1 < \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ heeft genomen, dan krijgen we

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 0.7560.$$

1b Beschouw voor $t \in [0, 1]$ de verdelingsfunctie $F_Y(t)$:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1^{3/2} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t^{2/3}) \\ &= \int_0^{t^{2/3}} \frac{3}{2} \sqrt{x} dx \\ &= \left[x^{3/2} \right]_0^{t^{2/3}} \\ &= t. \end{aligned}$$

Dit laat zien dat Y een $U[0, 1]$ verdeling heeft!

1c We gaan de centrale limiet stelling gebruiken, en hiertoe rekenen we eerst $\mathbb{E}(X_1)$ en $\text{Var}(X_1)$ uit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2} x^{3/2} dx \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Verder:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2} x^{5/2} dx \\ &= \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Dus $\text{Var}(X_1) = \frac{3}{7} - \frac{9}{25} = \frac{12}{175}$. Dus $\mathbb{E}(S) = 60$ en $\text{Var}(S) = 1200/175$. We weten dat de som van een groot aantal onafhankelijke en gelijk verdeelde stochasten ongeveer normaal verdeeld is. Dit betekent:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \geq 65) &\approx \mathbb{P}\left(N\left(60, \frac{1200}{175}\right) \geq 65\right) \\ &= \mathbb{P}\left(N(0, 1) \geq \frac{65 - 60}{\sqrt{1200/175}}\right) \\ &= \mathbb{P}(N(0, 1) \geq 1.91) = 0.028.\end{aligned}$$

2a De enige manier waarop $X = 4$, is als alle kaarten van dezelfde kleur bij elkaar liggen. Er zijn $4!$ mogelijke kleurvolgordes, en binnen elke kleur kunnen we de kaarten op $13!$ manieren neerleggen, dus de kans is $4!(13!)^4/52! = 34.5 \cdot 10^{-28}$.

2b De hint suggereert om te kijken naar de kans dat de i^{de} kaart een kleurwisseling was (voor $2 \leq i \leq 52$). Dit betekent dus dat de i^{de} kaart een andere kleur moet hebben dan de kaart op positie $i - 1$. Aangezien we alleen maar naar deze twee kaarten hoeven te kijken, hangt deze kans dus niet af van i ! De kans dat de tweede kaart een andere kleur heeft dan de eerste, is gelijk aan $39/51$ (van de overgebleven 51 kaarten hebben er 39 een andere kleur dan de eerste kaart). Dit betekent dat het verwachte aantal kleurwisselingen gelijk is aan $51 \cdot 39/51 = 39$. Dus $\mathbb{E}(X) = 40$.

3a Er geldt $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(U_1 = 1) = 1/2$ en $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1^c) + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(U_2 = 1) = 3/4$. Verder geldt dat $A_1 \cap A_2$ alleen optreedt als $U_1 = U_2 = 1$, dus $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1/4 \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$. A_1 en A_2 zijn dus afhankelijk. Andere methode: $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(A_2)$.

3b Er geldt:

$$\begin{aligned}p_k &= \mathbb{P}(A_{k-1})\frac{1}{2} + \mathbb{P}(A_{k-1}^c) \\ &= \frac{1}{2}p_{k-1} + (1 - p_{k-1}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}p_{k-1}.\end{aligned}$$

Definieer nu $q_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k$. We weten dat $p_1 = 1/2$, en er geldt ook dat $q_1 = 1/2$. Verder geldt

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{2}q_{k-1} &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= q_k.\end{aligned}$$

Nu volgt met inductie dat $p_k = q_k$. De “snelheid” van de pion is in verwachting gelijk aan $3/2$, dus in n stappen staat de pion rond positie $(3/2)n$ (als n groot is). Dit betekent dat n van de $(3/2)n$ posities geraakt zijn, dus $2/3$ van het totaal.

3c Als we conditioneren op A_k , dan weten we dus dat de pion ooit op positie k heeft gestaan. Vanaf dat moment moet die pion precies m stappen naar rechts doen om uit te komen in $m + k$, en dat heeft dus dezelfde kans als dat hij in 0 begint en een keer positie m moet bezoeken. Met andere woorden, $\mathbb{P}(A_{k+m} \mid A_k) = \mathbb{P}(A_m)$. We weten dat B_k en B_{m+k} alternerende stochasten zijn met $\mathbb{P}(B_k = 1) = p_k$ en $\mathbb{P}(B_{k+m} = 1) = p_{k+m}$. Dus

$$\mathbb{E}(B_k) = p_k \text{ en } \mathbb{E}(B_{k+m}) = p_{k+m}.$$

Ook geldt

$$\mathbb{E}(B_k B_{k+m}) = \mathbb{P}(A_k \cap A_{k+m}) = \mathbb{P}(A_{k+m} \mid A_k) \mathbb{P}(A_k) = p_m p_k.$$

Dus

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_k, B_{k+m}) &= p_m p_k - p_k p_{m+k} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^m + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+k} \\ &\quad - \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+m} + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+m} \right) \\ &= \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^m - \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+k} - \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+m} \\ &= \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \right) \end{aligned}$$