

Het gebruik van de Newton tekst of een rekenmachine of telefoon is niet toegestaan.

Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

Vectoren noteren we vetgedrukt, en met r noteren we de lengte van de vector \mathbf{r} in \mathbb{R}^3 .

1. (a) Laat zien dat de vergelijkingen van Newton voor een twee deeltjes gravitatiesysteem

$$m\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad M\ddot{\mathbf{v}} = -\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = -k(\mathbf{u} - \mathbf{v})/|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^3, \quad k = GmM$$

kunnen worden ontkoppeld tot de twee gescheiden vergelijkingen

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}/r^3, \quad \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

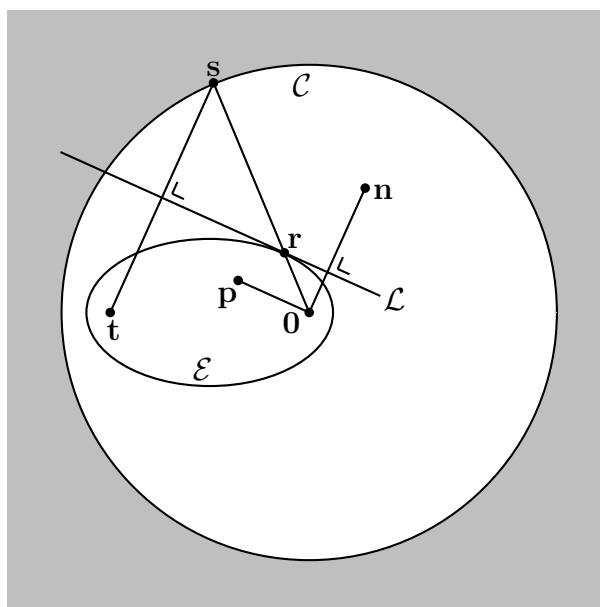
met $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ de relatieve afstand, $\mathbf{z} = (m\mathbf{u} + M\mathbf{v})/(m + M)$ het zwaartepunt, en $\mu = mM/(m + M)$ de gereduceerde massa.

- (b) Welke conclusie kun je trekken voor de beweging van \mathbf{z} ?

2. Een puntdeeltje met massa $\mu > 0$ en positie \mathbf{r} beweegt zich volgens de vergelijking

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}/r^3$$

met $k > 0$ een positieve constante. Noteer $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ voor de impuls en $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ voor het impulsmoment. Onderstaande figuur is behulpzaam bij het maken van deze opgave.



ZOZ

- (a) Bewijs dat het impulsmoment \mathbf{L} behouden blijft. Veronderstel vanaf nu dat $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$.
- (b) Concludeer dat de beweging zich afspeelt in een vlak \mathcal{V} door de oorsprong.
- (c) Bewijs dat de totale energie $H = p^2/(2\mu) - k/r < 0$ behouden blijft. Veronderstel vanaf nu dat $H < 0$.
- (d) Ga na dat de beweging zich afspeelt binnen de valcirkel \mathcal{C} in dit vlak \mathcal{V} met middelpunt de oorsprong $\mathbf{0}$ en straal $-k/H$.
- (e) Het punt \mathbf{t} dat ontstaat door een punt \mathbf{s} in het vlak \mathcal{V} te spiegelen in lijn $\mathbf{r} + \mathbb{R}\mathbf{p}$ wordt gegeven door de formule

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} - 2((\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}/n^2$$

met $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{L}$. Geef een meetkundige uitleg van deze formule.

- (f) Zij $\mathbf{s} = -k\mathbf{r}/(rH)$ de projectie van \mathbf{r} op de valcirkel \mathcal{C} . Controleer dat in dit geval $\mathbf{t} = \mathbf{K}/(\mu H)$ met

$$\mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - k\mu\mathbf{r}/r$$

de zogenaamde Lenz vector.

- (g) U mag gebruiken dat de Lenz vector behouden blijft. Over wat voor soort kromme \mathcal{E} beweegt het puntdeeltje met positie \mathbf{r} ? Beargumenteer uw antwoord.
- (h) De derde (harmonische) wet van Kepler luidt $T^2/a^3 = 4\pi^2\mu/k$. Waarvoor staan T en a in deze formule?
- (i) Concludeer met gebruikmaking van deze harmonische wet dat bij benadering T^2/a^3 gelijk is aan $4\pi^2/(GM)$ als we aannemen dat $m \ll M$ in de notatie van de eerste opgave.
- (j) Een komeet beweegt over een ellipsbaan om de zon met een periode van 64 jaar. Bereken de lange as van deze ellips in astronomische eenheden.
- (k) Bereken de excentriciteit van deze ellips als de komeet in zijn perihelium een halve astronomische eenheid van de zon is verwijderd.