Tentamen (Extra tijd)	**Inleiding in de Grafentheorie**	19 januari 2015
HG00.062/071(086)		12.30–15.30(16.30)

In sommige onderdelen van de volgende **vijf** *opgaven worden meerdere vragen gesteld — vergeet niet die allemaal te beantwoorden! In de kantlijn staat het aantal te behalen punten per onderdeel. Op het laatste blad van het tentamen staan enkele figuren die je bij Opgaven*
10 pt *3 en 4 kunt gebruiken. Vergeet niet op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam te schrijven.*

1. We laten zien dat een gradenrijtje bij echt verschillende grafen kan horen.

4 pt (a) Teken één graaf waarvan de punten graad 2, 2, 3, 3, 3, 5 hebben.

4 pt (b) Definieer wat *isomorfie* van grafen is.

5 pt (c) Leid uit de definitie van isomorfie af dat geldt: als G en H isomorf zijn en G bevat een circuit van lengte k, dan bevat ook H een circuit van lengte k.

7 pt (d) Er bestaat een tweede graaf waarvan de punten graad 2, 2, 3, 3, 3, 5 hebben, die niet isomorf is met de graaf uit onderdeel (a). Teken ook die graaf en bewijs dat de twee niet isomorf zijn.

2. Met $\deg(v)$ geven we de graad van een punt v aan. Deze opgave gaat over de Stelling van Ore, die als volgt luidt:

Elke graaf G met $n \geq 3$ punten die aan eigenschap $*$ voldoet is een Hamiltongraaf:

$*$ *als v en w geen buren zijn, dan is* $\deg(v) + \deg(w) \geq n$.

4 pt (a) Teken een 3-reguliere graaf op 6 punten; laat zien dat deze graaf aan de voorwaarden van de Stelling van Ore voldoet, en geef een Hamiltoncircuit aan.

In de volgende vier stappen geven we een bewijs van de Stelling van Ore. Veronderstel dat H een graaf op n punten is die aan $*$ voldoet èn een maximale niet-Hamiltongraaf is (dat wil zeggen: H heeft geen Hamiltoncircuit, maar als je een lijn toevoegt aan H dan ontstaat er wel een Hamiltoncircuit).

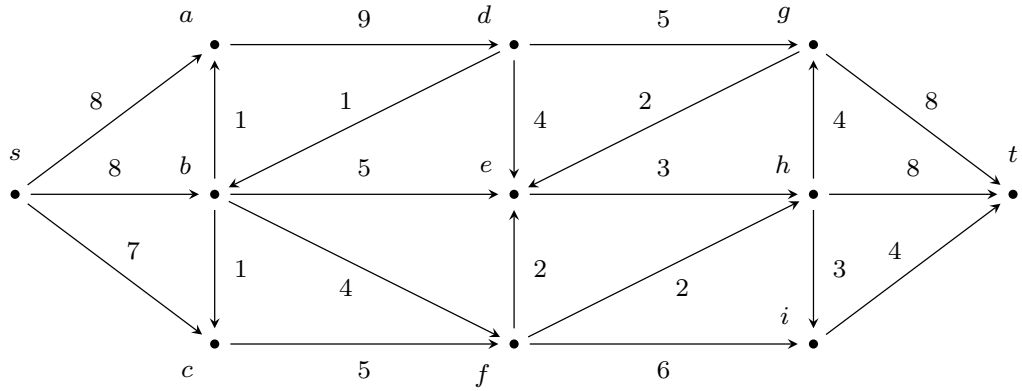
4 pt (b) Laat zien dat we dan de punten van H kunnen nummeren als $v_1, v_2, \ldots, v_n$, zodat $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ een pad is in H en $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$.

4 pt (c) Laat vervolgens zien dat er punten v_i, v_{i+1} in dat pad P moeten zijn zodanig dat v_i en v_n buren zijn, en dat ook v_{i+1} en v_1 buren zijn. Doe dit als volgt: bekijk de verzameling W bestaande uit punten v_k uit het pad die een opvolger v_{k+1} in het pad hebben die een buur is van v_1. Bewijs dat enerzijds het aantal elementen van W gelijk is aan $\deg(v_1)$, en anderzijds dat (vanwege $*$) er (inclusief v_n zelf) hoogstens $\deg(v_1)$ niet-buren van v_n zijn; concludeer hieruit dat W een element v_i bevat dat buur is van v_n.

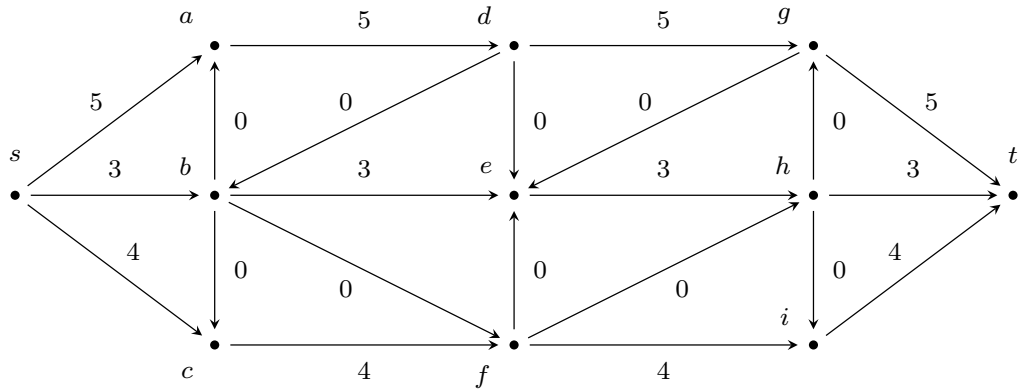
4 pt (d) Geef nu een Hamiltoncircuit in H aan!

4 pt (e) Maak het bewijs van de Stelling van Ore af.

3. Deze opgave gaat over onderstaand s–t netwerk. In het netwerk zijn voor alle pijlen de **capaciteiten** aangegeven.



10 pt (a) In onderstaand plaatje van hetzelfde netwerk is een (voor de hand liggende) s–t-**stroom** aangegeven. Teken (op het Hulpvel) de hulpgraaf die volgens het stroomvermeerderingsalgoritme hoort bij deze stroom in dit netwerk, en geef een stroomvermeerderend pad met waarde ($\alpha =$) 2 aan. Teken (op het Hulpvel) ook de totale stroom die in het netwerk ontstaat als dit stroomvermeerderend pad wordt toegevoegd aan onderstaande stroom. Wat is de waarde van die totale stroom?



10 pt (b) Vind een snede met minimale capaciteit: geef de snede U en ook de capaciteit van $\delta^+(U)$.

4. Zes docenten (A tot en met F) moeten zes klassen (a tot en met f) les geven; in de matrix

	a	b	c	d	e	f
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	0	1	0	1
C	0	1	1	0	0	0
D	0	0	1	1	1	0
E	0	1	1	0	0	0
F	1	0	0	0	1	1

betekent een 1 in de i-de rij en j-de kolom dat docent i klas j les moet geven. Elke les duurt 1 uur. We willen een rooster maken voor het geven van de lessen in zo weinig mogelijk uren. (Elke klas en elke docent kan in elk uur natuurlijk maar 1 les krijgen of geven.)

4 pt (a) Zonder dit probleem op te lossen, kun je eenvoudig aan de matrix aflezen wat het minimaal aantal benodigde uren zal zijn. Hoe? En wat is dat aantal uur in dit geval?

4 pt (b) Formuleer een stelling uit de grafentheorie waarmee men bewijst dat je zo altijd het juiste antwoord krijgt, en geef het verband tussen de matrix en de graaf uit die stelling.

4 pt (c) Hieronder heb ik al een poging gedaan het benodigde rooster te maken; nu betekent een getal k op positie i, j in de matrix dat docent i aan klas j op uur k les geeft.

	a	b	c	d	e	f
A	$\times$	1	2	$\times$	$\times$	$\times$
B	2	$\times$	$\times$	1	$\times$	3
C	$\times$	3	4	$\times$	$\times$	$\times$
D	$\times$	$\times$		3	1	$\times$
E	$\times$	2	3	$\times$	$\times$	$\times$
F	1	$\times$	$\times$	$\times$	2	4

Zoals je ziet heb ik een probleem met het open gebleven vakje (op positie $4, 3$). Wijzig en completeer op het Hulpvel het rooster (met het aantal uren dat je in (a) hebt gevonden), maar zorg er daarbij voor dat in het nu nog open gebleven vakje een 1 komt te staan en dat docent D het vierde uur vrij houdt.

4 pt (d) De school wil nu proberen aan elke klas een docent als mentor toe te voegen, en verschillende mentoren voor verschillende klassen. Een docent mag bovendien alleen mentor van een klas zijn als de docent volgens de matrix les moet geven aan die klas. Het is mogelijk om dit probleem te formuleren als het probleem van het vinden van een maximale stroom in een netwerk. Teken dit netwerk met de te gebruiken capaciteiten en geef aan waarmee de punten corresponderen.

4 pt (e) Bepaal een maximale stroom in je netwerk uit (d), geef een minimale snede die daarmee correspondeert; kan de school aan alle klassen een mentor toewijzen?

5. Deze opgave gaat over *volledige tripartiete* grafen. Een graaf $G = (V, E)$ heet volledig tripartiet als V in drie niet-lege klassen V_1, V_2, V_3 kan worden gesplitst zo dat E precies bestaat uit alle lijnen tussen punten van V_i en punten van V_j, voor $i \neq j$; er zijn dus geen lijnen binnen V_i. Als de aantallen elementen van V_1, V_2, V_3 respectievelijk r, s, t zijn, geven we de volledige tripartiete graaf aan met $K_{r,s,t}$.

2 pt (a) Teken $K_{2,2,2}$.

3 pt (b) Geef een formule voor het aantal lijnen van $K_{r,s,t}$, waaruit duidelijk blijkt dat dit een geheel getal is.

3 pt (c) Bewijs dat $K_{r,s,t}$ een Eulergraaf is dan en slechts dan als r, s, t alledrie even zijn of alledrie oneven zijn. Noem en formuleer de stellingen uit het dictaat die je toepast nauwkeurig.

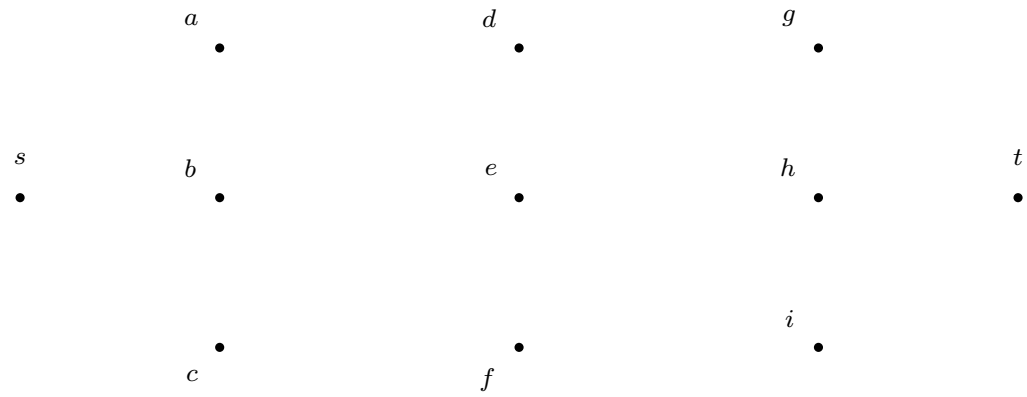
2 pt (d) Beschrijf of teken duidelijk hoe je een Eulercykel in $K_{3,3,3}$ kunt gebruiken om een Eulercykel in K_9 te maken.

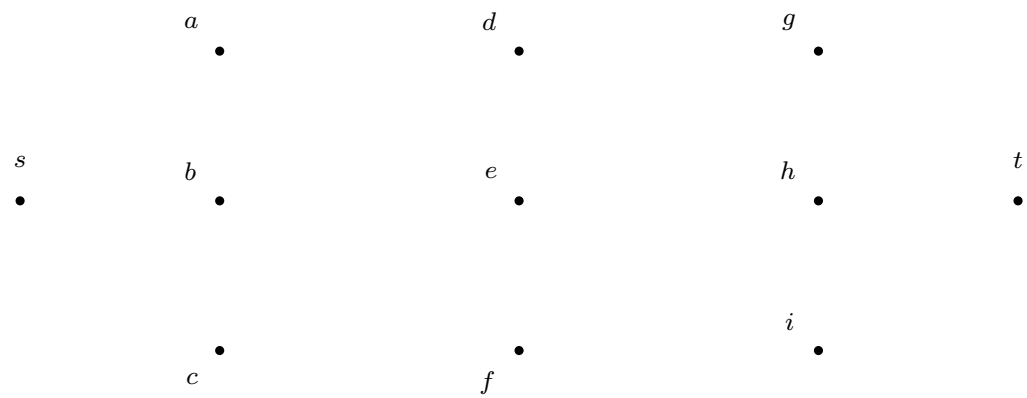
Tot. 100 pt

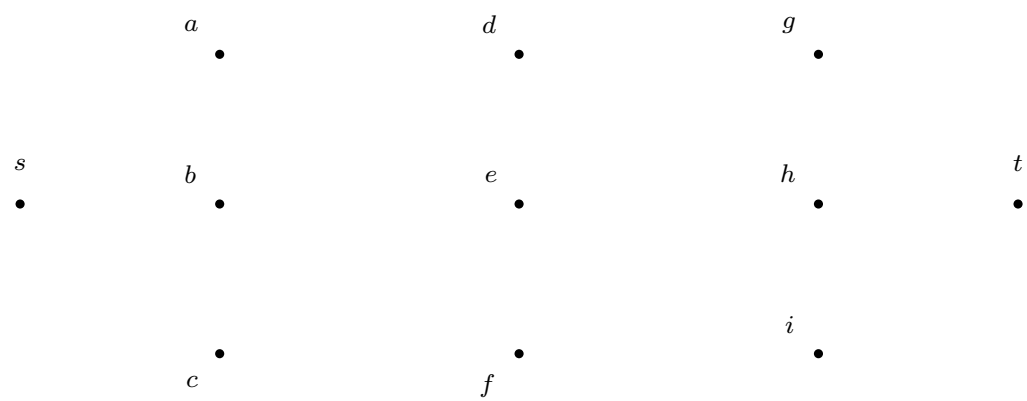
Klad

Hulpvel

3. Punten uit het netwerk:







4. Rooster:

	a	b	c	d	e	f
A	×			×	×	×
B		×	×		×	
C	×			×	×	×
D	×	×				×
E	×			×	×	×
F		×	×	×		

	a	b	c	d	e	f
A	×			×	×	×
B		×	×		×	
C	×			×	×	×
D	×	×				×
E	×			×	×	×
F		×	×	×		

Klad