

In de volgende opgaven wordt onder een graaf, net als in het dictaat, steeds een enkelvoudige (dus geen dubbele lijnen of lussen), ongerichte graaf met eindig veel punten verstaan (tenzij anders aangegeven).

1. Een rij $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ van $k \geq 1$ niet-negatieve gehele getallen met $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k$ heet een *gradenrijtje* als er een graaf G bestaat met k punten waarvan punt i graad d_i heeft (voor $1 \leq i \leq k$).
 - (a) Teken één graaf G waaruit blijkt dat $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$ een gradenrijtje is.
 - (b) Bewijs dat $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 3)$ geen gradenrijtje is.
 - (c) Geef de definitie van isomorfe grafen.
 - (d) Leid uit deze definitie van isomorfie af dat geldt: als G en H isomorfe grafen zijn en G bevat een k -cykel, dan bevat ook H een k -cykel.
 - (e) Er zijn twee niet-isomorfe grafen, die ook niet isomorf met jouw G uit onderdeel (a) zijn, met hetzelfde gradenrijtje uit (a). Teken ook die grafen en bewijs dat de drie twee-aan-twee niet isomorf zijn.
2. Los de volgende problemen op.
 - (a) In de volgende ‘matrix’ corresponderen de kolommen met de klassen A tot en met H , en de rijen met de leraren a tot en met g .

	A	B	C	D	E	F	G	H
a		$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
b	$\times$			$\times$	$\times$		$\times$	
c	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$		
d			$\times$		$\times$		$\times$	
e	$\times$			$\times$		$\times$		$\times$
f			$\times$	$\times$			$\times$	$\times$
g	$\times$	$\times$			$\times$			

Een open vakje in de matrix betekent dat er door de leraar van die rij aan de klas van die kolom les gegeven dient te worden. Geef eerst het **minimale aantal lokalen** dat hiervoor benodigd is, en maak vervolgens een **rooster** voor die lokalen (bijvoorbeeld door in elk open vakje een lokaalnummer in te vullen).

- (b) Vind de **maximale waarde** van een s - t stroom in het netwerk van Figuur 1, waarin de capaciteiten gegeven zijn. (Figuur 1 staat enkele keren afgebeeld op het bijgevoegde kladblad.) Geef deze **stroom** aan in het netwerk. Bepaal ook de **minimale capaciteit** van een s - t snede, en geef zo’n **snede** aan door precies te zeggen welke pijlen er in zitten.

3. Een *snark* is een 3-reguliere graaf waarvan het lijnkleurgetal 4 is.
- (a) Laat zien dat K_4 een 3-reguliere graaf is met lijnkleurgetal 3.
 - (b) Laat zien dat de *bloem-snark* (zie Figuur 2. hieronder) 4-lijnkleurbaar is. Dit is een voorbeeld van een snark; maar je hoeft niet te bewijzen dat P niet 3-lijnkleurbaar is!
 - (c) De *Petersen graaf* is $P = \overline{L(K_5)}$. Beredeneer dat P een 3-reguliere graaf op 10 punten is.
 - (d) Teken K_5 , en ook P ; laat zien dat P een 4-lijnkleurbare graaf is. Wederom: dit is een snark, maar je hoeft niet te laten zien dat P niet 3-lijnkleurbaar is.
 - (e) Bewijs dat elke 3-reguliere graaf een even aantal punten heeft.
 - (f) Bewijs dat een snark geen Hamiltoncircuit bevat. [Hint: kleur het Hamiltoncircuit en gebruik (e).]

4. Deze opgave gaat over samenhangende grafen.

- (a) Geef de definitie van *een pad* in een graaf en van *samenhangende* graaf.
- (b) Als G een onsamenshangende graaf is, dan is het complement $\overline{G}$ samenhangend. Bewijs dat.
- (c) Geef een bewijs of tegenvoorbeeld voor de bewering: als $\overline{G}$ samenhangend is dan is G onsamenshangend.

De onderstaande 3 onderdelen betreffen de volgende bewering.

Bewering. *In een graaf is het aantal punten hoogstens 1 meer dan het aantal lijnen.*

- (d) Als de Bewering geldt voor alle samenhangende grafen met niet meer dan m lijnen, dan geldt de Bewering ook voor alle samenhangende grafen met $m + 1$ lijnen waarin een circuit voorkomt. Bewijs dit.
- (e) Als de Bewering geldt voor alle samenhangende grafen met niet meer dan m lijnen, dan geldt de Bewering ook voor alle samenhangende grafen met $m + 1$ lijnen waarin géén circuit voorkomt. Bewijs dit. [Hint: kijk naar een *langste pad* in de graaf en verwijder een eindpunt.]
- (f) De bewering geldt voor alle samenhangende grafen. Bewijs dit.