Hertentamen Lineaire Algebra B

16 juli 2021, 8:30–11:30

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, maar je antwoorden moeten exact zijn.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 58 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/58+1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Dit tentamen heeft 4 bladzijden.
- Veel succes!

Opgave 1 (12 punten)**.** In deze opgave beschouwen we $\mathbb{R}^4$ met het standaard inprodukt. Beschouw de volgende vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,0,1,0) \\ w_2 &= (1,1,0,0) \\ w_3 &= (0,0,1,1). \end{aligned}$$

(a) [3 punten] Bewijs dat deze drie vectoren lineair onafhankelijk zijn.

(b) [6 punten] Bepaal een orthonormale basis voor het opspansel W van w_1, w_2 en w_3.

(c) [3 punten] Bereken de loodrechte projectie van de vector $(0,0,0,1)$ op W.

Opgave 2 (14 punten)**.** Stel dat $\langle -,-\rangle_1$ en $\langle -,-\rangle_2$ twee inprodukten zijn op een vectorruimte V over $F = \mathbb{R}$ of $F = \mathbb{C}$.

(a) [6 punten] Bewijs dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a \leq 1$, de uitdrukking

$$\langle v, w\rangle = a\langle v, w\rangle_1 + (1-a)\langle v, w\rangle_2 \tag{1}$$

een inprodukt definieert op V.

(b) [4 punten] Zij $0 \leq a \leq 1$. Voor elke vector $v \in V$ geven we zijn norm geassocieerd met het inprodukt $\langle -,-\rangle$ uit onderdeel (a) aan met $\|v\|$, en voor $j = 1, 2$ geven we de norm van v geassocieerd met $\langle -,-\rangle_j$ aan met $\|v\|_j$. Bewijs dat voor alle $v \in V$,

$$\|v\| \leq \max(\|v\|_1, \|v\|_2).$$

(De uitdrukking aan de rechterkant is het grootste van de twee getallen $\|v\|_1$ en $\|v\|_2$.)

(c) [4 punten] Geef een voorbeeld van een vectorruimte V, inprodukten $\langle -,-\rangle_1$ en $\langle -,-\rangle_2$ op V en een $a \in \mathbb{R}$ zo dat (1) *geen* inprodukt definieert op V.

Opgave 3 (12 punten)**.** Zij $P(\mathbb{R})$ de vectorruimte van alle polynomen met reële coëfficienten. Zij $T\colon P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$(Tf)(x) = f(-x)$$

voor $f \in P(\mathbb{R})$. Je mag gebruiken dat dit een lineaire afbeelding is zonder dat te bewijzen.

Zij $n \in \mathbb{N}$, waarbij onze conventie is dat $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ begint bij 1. Zij $P_n(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte van polynomen van graad hoogstens n.

(a) [3 punten] Bewijs dat $P_n(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$ invariant is onder T.

We beschouwen nu het inprodukt op $P_n(\mathbb{R})$ gegeven door

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \tag{2}$$

voor $f, g \in P_n(\mathbb{R})$. Je mag gebruiken dat dit een inprodukt is zonder dat te bewijzen. Je mag ook het volgende feit uit calculus gebruiken. Als $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie is (zoals een polynoom), dan is voor alle $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

(b) [3 punten] Bewijs dat de beperking van T tot $P_n(\mathbb{R})$ zelfgeadjungeerd is t.a.v. het inprodukt (2).

(c) [3 punten] Bewijs dat de beperking van T tot $P_n(\mathbb{R})$ orthogonaal is t.a.v. het inprodukt (2).

(d) [3 punten] Bepaal (met zo weinig mogelijk moeite) de eigenwaarden van de beperking van T tot $P_n(\mathbb{R})$.

Opgave 4 (6 punten)**.** Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 punten] Is er een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ van eigenvectoren van A? Bewijs je antwoord.

(b) [4 punten] Is er een orthonormale basis van $\mathbb{C}^3$ van eigenvectoren van A? Bewijs je antwoord.

Opgave 5 (14 punten)**.** Beschouw de lineaire afbeelding $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeven door de matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 5 \\ -7 & 5 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & 6 & 9 \\ -4 & -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Je mag de volgende eigenschappen van A gebruiken zonder ze te bewijzen.

1. Het karakteristieke polynoom van A is $t^2(4-t)^2$.

2. Door Gauss-eliminatie is A om te schrijven tot

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Het kwadraat van A is

$$A^2 = \frac{16}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Door Gauss-eliminatie is $A - 4I$ om te schrijven tot

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) [6 punten] Bewijs dat T een Jordan-normaalvorm heeft, en dat die gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(b) [8 punten] Vind een Jordanbasis voor T.