Hertentamen Lineaire Algebra B

16 juli 2021, 8:30–11:30

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, maar je antwoorden moeten exact zijn.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 58 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/58+1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Dit tentamen heeft 8 bladzijden.
- Veel succes!

Opgave 1 (12 punten)**.** In deze opgave beschouwen we $\mathbb{R}^4$ met het standaard inprodukt. Beschouw de volgende vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,0,1,0) \\ w_2 &= (1,1,0,0) \\ w_3 &= (0,0,1,1). \end{aligned}$$

(a) [3 punten] Bewijs dat deze drie vectoren lineair onafhankelijk zijn.

(b) [6 punten] Bepaal een orthonormale basis voor het opspansel W van w_1, w_2 en w_3.

(c) [3 punten] Bereken de loodrechte projectie van de vector $(0,0,0,1)$ op W.

Oplossing. (a) Als $a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = (0,0,0,0)$ voor $a_j \in \mathbb{R}$, dan geldt

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

De eerste twee vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $a_1 = 0$.

(b) We passen eerst het Gram–Schmidt proces toe om een orthogonale basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ van W te vinden. We berekenen

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 = (1,0,1,0) \\ \|v_1\|^2 &= 2 \\ v_2 &= w_2 - \frac{\langle w_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1/2, 1, -1/2, 0) \\ \|v_2\|^2 &= 3/2 \\ v_3 &= w_3 - \frac{\langle w_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle w_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = (-1/3, 1/3, 1/3, 1) \\ \|v_3\|^2 &= 4/3. \end{aligned}$$

(We kunnen direct controleren dat deze drie vectoren inderdaad orthogonaal zijn.)

Door te normaliseren vinden we de orthonormale basis bestaande uit de vectoren

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \\ u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1/2, 1, -1/2, 0) \\ u_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(-1/3, 1/3, 1/3, 1). \end{aligned}$$

(c) Schrijf $x = (0,0,0,1)$. Dan

$$\begin{aligned} \langle x, u_1\rangle &= 0 \\ \langle x, u_2\rangle &= 0 \\ \langle x, u_3\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Dus de gevraagde orthogonale projectie is

$$\langle x, u_3 \rangle u_3 = \frac{3}{4}(-1/3, 1/3, 1/3, 1) = \frac{1}{4}(-1, 1, 1, 3).$$

$\square$

Opgave 2 (14 punten)**.** Stel dat $\langle -, - \rangle_1$ en $\langle -, - \rangle_2$ twee inprodukten zijn op een vectorruimte V over $F = \mathbb{R}$ of $F = \mathbb{C}$.

(a) [6 punten] Bewijs dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a \leq 1$, de uitdrukking

$$\langle v, w \rangle = a\langle v, w \rangle_1 + (1-a)\langle v, w \rangle_2 \tag{1}$$

een inprodukt definieert op V.

(b) [4 punten] Zij $0 \leq a \leq 1$. Voor elke vector $v \in V$ geven we zijn norm geassocieerd met het inprodukt $\langle -, - \rangle$ uit onderdeel (a) aan met $\|v\|$, en voor $j = 1, 2$ geven we de norm van v geassocieerd met $\langle -, - \rangle_j$ aan met $\|v\|_j$. Bewijs dat voor alle $v \in V$,

$$\|v\| \leq \max(\|v\|_1, \|v\|_2).$$

(De uitdrukking aan de rechterkant is het grootste van de twee getallen $\|v\|_1$ en $\|v\|_2$.)

(c) [4 punten] Geef een voorbeeld van een vectorruimte V, inprodukten $\langle -, - \rangle_1$ en $\langle -, - \rangle_2$ op V en een $a \in \mathbb{R}$ zo dat (1) *geen* inprodukt definieert op V.

Oplossing. (a) Lineariteit in de eerste component geldt voor alle $a \in F$. En omdat $a \in \mathbb{R}$,

$$\langle v, w \rangle = a\overline{\langle w, v \rangle_1} + (1-a)\overline{\langle w, v \rangle_2} = \overline{\langle v, w \rangle}.$$

Stel dat $v \neq 0$. Dan is

$$\langle v, v \rangle = a\langle v, v \rangle_1 + (1-a)\langle v, v \rangle_2.$$

Hier zijn $\langle v, v \rangle_1, \langle v, v \rangle_2 > 0$. Omdat $a \in [0, 1]$ zijn de twee termen aan de rechterkant beide niet-negatief. En minstens 1 ervan is strikt positief: als de eerste term nul is, dan moet $a = 0$, dus dan is de tweede term positief.

(b) Voor alle $v \in V$ is

$$\|v\|^2 = a\|v\|_1^2 + (1-a)\|v\|_2^2.$$

Omdat $a \geq 0$ en $1 - a \geq 0$ is de rechterkant kleiner dan of gelijk aan

$$a \max(\|v\|_1, \|v\|_2)^2 + (1-a)\max(\|v\|_1, \|v\|_2)^2 = \max(\|v\|_1, \|v\|_2)^2.$$

(c) Zij V een willekeurige vectorruimte, $\langle -,-\rangle_1$ een inprodukt op V en definieer $\langle -,-\rangle_2$ door

$$\langle v,w\rangle_2 = 2\langle v,w\rangle_1.$$

Neem $a=2$. Dan is voor alle $v,w \in V$,

$$\langle v,w\rangle = 0,$$

en dit is niet positief definiet (eigenschap (d) van inprodukten). $\square$

Opgave 3 (12 punten)**.** Zij $P(\mathbb{R})$ de vectorruimte van alle polynomen met reële coëfficienten. Zij $T\colon P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$(Tf)(x) = f(-x)$$

voor $f \in P(\mathbb{R})$. Je mag gebruiken dat dit een lineaire afbeelding is zonder dat te bewijzen.

Zij $n \in \mathbb{N}$, waarbij onze conventie is dat $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ begint bij 1. Zij $P_n(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte van polynomen van graad hoogstens n.

(a) [3 punten] Bewijs dat $P_n(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$ invariant is onder T.

We beschouwen nu het inprodukt op $P_n(\mathbb{R})$ gegeven door

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \tag{2}$$

voor $f,g \in P_n(\mathbb{R})$. Je mag gebruiken dat dit een inprodukt is zonder dat te bewijzen. Je mag ook het volgende feit uit calculus gebruiken. Als $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie is (zoals een polynoom), dan is voor alle $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

(b) [3 punten] Bewijs dat de beperking van T tot $P_n(\mathbb{R})$ zelfgeadjungeerd is t.a.v. het inprodukt (2).

(c) [3 punten] Bewijs dat de beperking van T tot $P_n(\mathbb{R})$ orthogonaal is t.a.v. het inprodukt (2).

(d) [3 punten] Bepaal (met zo weinig mogelijk moeite) de eigenwaarden van de beperking van T tot $P_n(\mathbb{R})$.

Oplossing. (a) Stel dat $f \in P_n(\mathbb{R})$ gelijk is aan

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Dan is

$$(Tf)(x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n$$

weer een polynoom van graad n.

(b) Als $f, g \in P_n(\mathbb{R})$, dan is vanwege een substitutie $y = -x$,

$$\langle Tf, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(-x)g(x)\,dx = -\int_{1}^{-1} f(y)g(-y)\,dy = \int_{-1}^{1} f(y)g(-y)\,dy = \langle f, Tg\rangle.$$

(c) Voor orthogonaliteit berekenen we net zo

$$\|Tf\|^2 = \int_{-1}^{1} f(-x)^2 = -\int_{1}^{-1} f(y)^2\,dy = \int_{-1}^{1} f(y)^2\,dy = \|f\|^2.$$

(d) Omdat T zelfgeadjungeerd en orthogonaal is, liggen zijn eigenwaarden in $\{-1, 1\}$. Een eigenvector bij eigenwaarde 1 is het constante polynoom 1, en een eigenvector bij eigenwaarde -1 is het polynoom x. Dus dit zijn inderdaad allebei eigenwaarden. □

Opgave 4 (6 punten)**.** Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 punten] Is er een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ van eigenvectoren van A? Bewijs je antwoord.

(b) [4 punten] Is er een orthonormale basis van $\mathbb{C}^3$ van eigenvectoren van A? Bewijs je antwoord.

Oplossing. (a) De matrix A is niet symmetrisch/zelfgeadjungeerd, dus nee.

(b) We berekenen

$$A^*A = 4I_4 = AA^*.$$

Dus A is normaal, en dus is het antwoord ja. □

Opgave 5 (14 punten)**.** Beschouw de lineaire afbeelding $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeven door de matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 5 \\ -7 & 5 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & 6 & 9 \\ -4 & -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Je mag de volgende eigenschappen van A gebruiken zonder ze te bewijzen.

1. Het karakteristieke polynoom van A is $t^2(4-t)^2$.
2. Door Gauss-eliminatie is A om te schrijven tot
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Het kwadraat van A is
$$A^2 = \frac{16}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Door Gauss-eliminatie is $A - 4I$ om te schrijven tot
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) [6 punten] Bewijs dat T een Jordan-normaalvorm heeft, en dat die gelijk is aan
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(b) [8 punten] Vind een Jordanbasis voor T.

Oplossing. (a) Het karakteristiek polynoom van T splijt, en dus heeft T een Jordan normaalvorm. Vanwege punt 1 zijn de eigenwaarden 0 en 4, beide met multipliciteit 2.

Voor de eigenwaarde 0 bestaat het puntendiagram dus uit 2 punten. Vanwege punt 2 is $\operatorname{rang}(A) = 3$. Dus het aantal punten op de eerste rij in het puntendiagram is
$$\dim(\mathbb{R}^4) - \operatorname{rang}(A) = 4 - 3 = 1.$$
Dus het puntendiagram bij eigenwaarde 0 bestaat uit 1 kolom van 2 punten.

Voor de eigenwaarde 4 bestaat het puntendiagram ook uit 2 punten. Vanwege punt 4 is $\operatorname{rang}(A-4I)=2$. Dus het aantal punten op de eerste rij in het puntendiagram is

$$\dim(\mathbb{R}^4) - \operatorname{rang}(A-4I) = 4-2 = 2.$$

Dus het puntendiagram bij eigenwaarde 0 bestaat uit 2 kolommen van elk 1 punt.

Uit deze puntendiagrammen lezen we af dat de Jordan normaalvorm (3) is.

(b) Vanwege de gevonden puntendiagrammen is een Jordanbasis van de vorm $\{Av_1, v_1, v_2, v_3\}$, waarbij $v_1 \in N(A^2)$ maar $Av_1 \neq 0$, en v_2 en v_3 eigenvectoren zijn bij eigenwaarde 4.

Om de kern van A^2 te bepalen gebruiken we punt 3. Daaruit vinden we met Gauss-eliminatie

$$A^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus $x \in \mathbb{R}^4$ ligt in de kern van A^2 dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dus $x_2 = x_1$, $x_4 = x_1 - x_3$, en dus

$$x = (x_1, x_1, x_3, x_1 - x_3) = x_1(1,1,0,1) + x_3(0,0,1,-1).$$

We kiezen $v_1 = (0,0,1,-1)$, vanwege punt 2 zien we dat deze vector inderdaad niet in de kern van A ligt. (Je kunt deze vector eventueel ook direct kiezen zonder Gauss-eliminatie, omdat de laatste twee kolommen van A^2 gelijk zijn, en de laatste twee kolommen van A niet.) Om precies te zijn,

$$Av_1 = (-1,-1,-1,0).$$

De twee vectoren Av_1 en v_1 zijn lineair onafhankelijk (zoals voorspeld door het Gevolg op blz. 490), en vormen dus een basis van K_0.

Voor de eigenwaarde 4 gebruiken we punt 4. Daaraan zien we dat $x \in \mathbb{R}^4$ een eigenvector is bij eigenwaarde 4 dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dus $x_4 = x_3$ en $x_2 = x_3 - x_1$. Dus

$$x = (x_1, x_3 - x_1, x_3, x_3) = x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, 1, 1, 1).$$

We kiezen de basisvectoren $v_3 = (1, -1, 0, 0)$ en $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ van $K_4 = E_4$.

We hebben nu een Jordanbasis $\{Av_1, v_1, v_2, v_3\}$ gevonden.

Ter controle kunnen we, als we willen, direct nagaan dat deze vectoren lineair onafhankelijk zijn, en dat

$$\begin{aligned} A(Av_1) &= 0 \\ Av_1 &= Av_1 \\ Av_3 &= 4v_3 \\ Av_4 &= 4v_4. \end{aligned}$$

$\square$