Herkansing Inleiding Wiskunde, NWI-WP029 (22 januari 2021, 08:30)

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) die je gebruikt! Geef ook aan (met datum) welke versie van de syllabus je gebruikt (liefst van 26-10-2020).

1. Bekijk in propositielogica de uitspraak
$$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C). \tag{1}$$
   (a) Laat zien dat deze uitspraak een tautologie is. **1 punt**
   (b) Geef een formeel bewijs van de uitspraak (zonder (a) en Stelling 1.4). **1 punt**

2. (a) Voor $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{2, 3, 4\}$, schrijf $P(X)$, $P(Y)$, en $P(X \cup Y)$ op. **1 punt**
   (b) Als je antwoord correct is zie je dat in dit voorbeeld geldt (een goede check!):
$$P(X) \cup P(Y) \subset P(X \cup Y). \tag{2}$$
   Bewijs dat de inclusie (2) ook voor willekeurige verzamelingen X en Y geldt. As je dit nuttig vindt kun je hierbij zonder bewijs (1) gebruiken. **1 punt**

3. Stel X is een verzameling met een partiële ordening $\leq$ (dus een poset). Hieruit gaan we een nieuwe poset $(Z, \leq')$ definiëren. Allereerst bestaat de verzameling Z uit alle *down-sets* $D(x) := \{y \in X \mid y \leq x\}$, zodat $Z \subset P(X)$. Offcieel geldt:
$$Z := \{z \in P(X) \mid \exists_{x \in X}(z = D(x))\}. \tag{3}$$
   Vervolgens is de relatie $\leq'$ per definitie dezelfde als in $P(X)$, oftewel:
$$D(x) \leq' D(y) \quad \text{desda} \quad D(x) \subset D(y).$$
   (a) Laat zien dat de relatie $\leq'$ een partiële ordening op Z definieert. **1 punt**
   (b) Laat zien dat de functie $D : X \to Z$, $x \mapsto D(x)$, een bijectie is en dat geldt: **1 punt**
$$\text{voor alle } x \in X \text{ en } y \in X : x \leq y \text{ desda } D(x) \leq' D(y).$$

4. Stel dat we een equivalentierelatie $\sim$ op een niet-lege verzameling X hebben, gegeven door $R \subset X \times X$ (dus voor alle duidelijkheid: $x \sim y$ desda $\langle x, y\rangle \in R$), en tevens een niet-lege deelverzameling $Y \subset X$. Dan hebben we de verzameling
$$Y \times Y = \{\langle x, y\rangle \in X \times X \mid x \in Y, y \in Y\} \subset X \times X. \tag{4}$$
   (a) Laat zien dat $R' = R \cap (Y \times Y)$ een equivalentierelatie op Y definieert. **1 punt**
   (b) Stel nu dat X eindig is en een equivalentierelatie $\sim$ draagt. Bewijs met inductie op het aantal elementen van X dat een deelverzameling $S \subset X$ bestaat zodat de doorsnede $[x] \cap S$ voor iedere $x \in X$ precies één element heeft.[1] **1 punt**

5. (a) Bekijk de functie $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, gegeven door $\iota(n) = [n, 0]_{\mathbb{Z}}$. Laat zien dat $\iota(n) + \iota(m) = \iota(n + m)$, zoals wordt beweerd in vgl. (5.45) in de syllabus. **1 punt**
   (b) Analoog voor de functie $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, gegeven door $j(k) = [k, 1]_{\mathbb{Q}}$, of expliciet: $j([a, b]_{\mathbb{Z}}) = [[a, b]_{\mathbb{Z}}, [1, 0]_{\mathbb{Z}}]_{\mathbb{Q}}$, zie (5.58): Laat zien dat $j(k + l) = j(k) + j(l)$. **1 punt**

Veel succes!

---

1. De inductiestap is gerelateerd aan het vorige deel van deze opgave. Als $X = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ uit $n + 1$ elementen bestaat, neem je $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$ met n elementen. Dan weet je dankzij (a) dat je de equivalentierelatie $\sim$ kunt beperken to $Y \subset X$, zodat je de inductiehypothese correct kunt formuleren.