Uitwerking Herkansing Inleiding Wiskunde (21-01-2019)

1. Bewijs (formeel) op twee manieren dat voor alle proposities α en β geldt

$$\vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta.$$

(a) Via bewijsregels 1, 3, 6, en 7 (op p. 19), waarbij je $\neg\alpha$ zo laat staan; **1 punt**

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{c}{[\alpha \wedge \neg\alpha]} \\ \hline
\neg\alpha & [\alpha] \\ \hline
\neg\alpha & [\alpha \vee \beta] \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta}
\end{array}$$

Stap 1: invoering aanname $[\alpha \wedge \neg\alpha]$
Stap 2: 2 keer regel 6 ($\wedge$-Eliminatie)
Stap 3: regel 1 en regel 7 ($\vee$-Introductie)
Stap 4: regel 7 ($\vee$-Eliminatie)
Stap 5: $\to$-Introductie op aanname $[\alpha \wedge \neg\alpha]$ (nu opgeheven) en conclusie β.

(b) Via bewijsregels 1, 2, 3, 5, en 6,[1] waarbij je $\neg\alpha$ vervangt door $\alpha \to \perp$. **1 punt**

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{c}{[\alpha \wedge (\alpha \to \perp)] \quad [\neg\beta]} \\ \hline
\neg\alpha & \alpha \to \perp \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\perp} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta}
\end{array}$$

Stap 1: invoering aannamen $[\alpha \wedge \neg\alpha]$ en $[\neg\beta]$
Stap 2: 2 keer regel 6 ($\wedge$-Eliminatie)
Stap 3: regel 2 (MP)
Stap 4: regel 5 (RAA) en opheffing aanname $[\neg\beta]$
Stap 5: $\to$-Introductie op aanname $[\alpha \wedge \neg\alpha]$ (nu opgeheven) en conclusie β.

2. Laat via waarheidstabellen zien dat voor alle proposities α, β, γ geldt: **1 punt**

$$\models ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma). \tag{1}$$

Dit had vrijwel iedereen goed. Ga alle 8 mogelijkheden na voor $\alpha = 0, 1$, $\beta = 0, 1$, en $\gamma = 0, 1$. Voorbeeld: als $\alpha = \beta = \gamma = 0$, dan volgt uit de waarheidstabellen dat $\alpha \to \gamma = 1$ en $\beta \to \gamma = 1$, waaruit volgt $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) = 1$. Voorts vinden we $\alpha \vee \beta = 0$, zodat $\alpha \vee \beta \to \gamma = 1$, en dan is (1) de implicatie $1 \to 1$, die waar is (=1).

---

1. In de opgave stond: Via bewijsregels 1, 2, 5, en 6, dus regel 3 was per ongeluk niet vermeld. Ik heb daarom alle bewijzen goed gerekend die zich hielden aan de instructie om $\alpha \to \perp$ te gebruiken, zoals: $[\alpha \wedge (\alpha \to \perp)]$ // $\alpha \to \perp, \alpha$ // $\perp$ //β // $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$, en een half punt gegeven voor leuke pogingen.

unt

3. (a) Voor $A = \{1,2\}$ en $B = \{2,3\}$, schrijf op wat $P(A)$, $P(B)$, en $P(A \cup B)$ zijn.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}; \tag{0.1}$$
$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}; \tag{0.2}$$
$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}. \tag{0.3}$$

punt

Laat (ook als controle op je werk!) zien dat

$$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B). \tag{2}$$

$$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}. \tag{0.4}$$

De implicatie (2) betekent: ieder element van $P(A) \cup P(B)$ zit ook in $P(A \cup B)$. Dit is duidelijk het geval.

(b) Bewijs nu (niet met plaatjes) dat de inclusie (2) ook voor willekeurige verzamelingen A en B geldt. Je kunt hierbij (als dit nuttig mocht zijn) zonder

punt

bewijs (1) gebruiken (en wel met $\alpha \equiv x \subset A$, $\beta \equiv x \subset B$, en $\gamma \equiv x \subset A \cup B$).

Formeler betekent (2):

$$\forall_x (x \in P(A) \cup P(B) \to x \in P(A \cup B)) \Leftrightarrow \tag{0.5}$$
$$\forall_x ((x \subset A \vee x \subset B) \to x \subset A \cup B) \Leftrightarrow \tag{0.6}$$
$$\alpha \vee \beta \to \gamma. \tag{0.7}$$

met α, β en γ als boven. Vanwege implicatie (1) volgt (0.7) als we kunnen bewijzen dat $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$, oftewel: $x \subset A \to x \subset A \cup B$ en $x \subset B \to x \subset A \cup B$. Dit is duidelijk uit de betekenis van het symbool $\cup$: $A \cup B = \cup\{A, B\}$ en elementen van $A \cup B$ zijn. dus elementen van A of elementen van B. Daarmee zijn deelverzamelingen van A ook automatisch deelverzamelingen van $A \cup B$ (en analoog met B in plaats van A).

4. Stel dat we een equivalentierelatie $\sim$ op een verzameling X hebben, gegeven door een deelverzameling $R \subset X \times X$, en tevens een deelverzameling $Y \subset X$. Dan is er een overeenkomstige deelverzameling $Y \times Y \subset X \times X$, gegeven door

$$Y \times Y = \{\langle x, y\rangle \in X \times X \mid x \in Y, y \in Y\}. \tag{0.8}$$

unt

(a) Laat zien dat $R' = R \cap (Y \times Y)$ een equivalentierelatie op Y definieert.
   - *R' is reflexief:* we laten zien dat $\forall_{x \in Y} \langle x, x\rangle \in R'$. Neem $x \in Y$. Omdat R een equivalentierelatie is, is deze reflexief. Omdat $Y \subset X$, geldt $\langle x, x\rangle \in R$. Omdat $x \in Y$, geldt $\langle x, x\rangle \in Y \times Y$. Dus $\langle x, x\rangle \in R \cap (Y \times Y) = R'$.
   - *R' is transitief:* We laten zien dat

   $$\forall_{x,y,z \in Y} (((\langle x, y\rangle \in R') \wedge (\langle y, z\rangle \in R')) \to \langle x, z\rangle \in R').$$

   Neem $x, y, z \in Y$, en die zitten dus ook in X. Net als boven geldt $\langle x, y\rangle \in R$ en $\langle y, z\rangle \in R$. Omdat R een equivalentierelatie is, is deze transitief, zodat $\langle x, z\rangle \in R$. Maar $x, z \in Y$ en dus $\langle x, z\rangle \in Y \times Y$. Dus $\langle x, z\rangle \in R \cap (Y \times Y) = R'$.

- *R' is symmetrisch:* we laten zien dat $\forall_{x,y\in Y}(\langle x,y\rangle \in R' \to \langle y,x\rangle \in R')$. Neem $x,y \in Y$ en neem aan dat $\langle x,y\rangle \in R$. Omdat R een equivalentierelatie is, is deze symmetrisch, zodat $\langle y,x\rangle \in R$. Omdat $x,y \in Y$, geldt $\langle y,x\rangle \in Y \times Y$. Dus $\langle y,x\rangle \in R \cap (Y \times Y) = R'$.

(b) Stel nu dat X eindig is. Bewijs met inductie op het aantal elementen van X dat een deelverzameling $S \subset X$ bestaat zodat de doorsnede $[x] \cap S$ voor iedere $x \in X$ precies één element heeft. Hierbij is de inductiestap gerelateerd aan het vorige deel van deze opgave: stel namelijk dat $X = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ uit $n+1$ elementen bestaat, neem $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$ met n elementen, enz. **1 punt**

We nemen aan dat X niet leeg is en beginnen de inductie met $n = 1$. Dan is $X = \{x\}$ en kan de relatie alleen zijn $x \sim x$. Kies $S = \{x\}$ en de uitspraak klopt. Neem nu aan dat $X = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ en neem aan (inductiehypothese) dat de uitspraak klopt voor alle verzamelingen met n elementen, en met name dus voor de deelverzameling $Y = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Er bestaat dus een $S' \subset Y$ zodat $[y]' \cap S'$ voor iedere $y \in Y$ precies één element heeft, waarbij $[y]' = \{z \in Y \mid z \sim' y\}$ en $\sim'$ de beperking is van $\sim$ tot y; volgens het vorige deel van de opgave is dit inderdaad weer een equivalentierelatie.
Nu maken we de volgende cruciale gevalsonderscheiding:

- Er is een $z \in Y$ zodat $x_{n+1} \sim z$. In dat geval neem je $S = S'$: voor $x \nsim z$ oftewel $x \notin [z]$, zodat $x \in Y$, geldt $[x] \cap S = [x] \cap S'$ en die heeft 1 element; voor $x \sim z$ (zoals bijv. het geval is voor $x = x_{n+1}$) geldt $[x] \cap S = [z] \cap S = [z] \cap S'$ en die heeft ook 1 element (bedenk dat $z \in Y$).
- Er is geen $z \in Y$ zodat $x_{n+1} \sim z$. Dan is $[x_{n+1}] = \{x_{n+1}\}$. Neem in dat geval $S = S' \cup \{x_{n+1}\}$. Voor $x \neq x_{n+1}$ (dus $x \in Y$) geldt dan wederom $[x] \cap S = [x] \cap S'$, met 1 element, en voor $x = x_{n+1}$ geldt $[x_{n+1}] \cap S = \{x_{n+1}\}$, opnieuw bestaande uit 1 element.

5. De eigenschappen **R1** t/m **R10**, die samen een *lichaam* definiëren, staan in vgl. (5.10) t/m (5.16), (5.25), (5.30), en (5.31) van de syllabus, en voor het gemak ook op de achterkant van dit tentamen. Laat voor twee van de zeven **R1** t/m **R7** (naar keuze), **R8**, **R9**, en **R10** zien dat ze in $\mathbb{C}$ gelden, aangenomen dat ze in $\mathbb{R}$ gelden (dit is een deel van het bewijs van Stelling 5.16). **2 punten**
Zie Uitwerkingen versie 16 december

Veel succes!

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R1} &: \forall_x \forall_y \forall_z \, (x + (y + z) = (x + y) + z)); \\
\mathbf{R2} &: \forall_x \forall_y (x + y = y + x); \\
\mathbf{R3} &: \forall_x \, (x + 0 = x); \\
\mathbf{R4} &: \forall_x \forall_y \forall_z \, (x \times (y \times z) = (x \times y) \times z)); \\
\mathbf{R5} &: \forall_x \forall_y (x \times y = y \times x); \\
\mathbf{R6} &: \forall_x \, (x \times 1 = x); \\
\mathbf{R7} &: \forall_x \forall_y \forall_z \, (x \times (y + z) = x \times y + x \times z); \\
\mathbf{R8} &: \forall_x \exists_y (x + y = 0); \\
\mathbf{R9} &: \forall_x ((x \neq 0) \to \exists_y (x \times y = 1)); \\
\mathbf{R10} &: 1 \neq 0.
\end{aligned}
$$