Naam (voornaam, achternaam):______________________________________

Student number:____

Zet je naam op alle bladzijdes (liefst nu!) voor het geval ze loslaten.

Zet je antwoorden op dit examenpapier, direct na de vraag is ruimte daaarvoor. Gebruik extra papier alleen als je geen ruimte hebt voor je antwoord (en voeg het toe aan je tentamen). Je hebt recht op kladpapier.

Opgave:	1 [8pt]	2 [8pt]	3 [8pt]	4 [8pt]	5 [8pt]	6 [5pt]	Total [45pt]
Score :							

45 punten is een 10,
0 punten is een 1,
en daartussen loopt het lineair. Dus cijfer is

$$\frac{\text{punten}}{45} \cdot 9 + 1.$$

Je hebt minimaal een 5 nodig (20 punten) voordat je huiswerkcijfer meetelt. Een cijfer van 5.5 of hoger is een voldoende. (Deze grens is hard - een 5.49999 is niet gehaald.)

Opgave 1. [8]
a) [4] Los op: wat kan $z \in \mathbb{C}$ zijn, als $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$.
b) [4] Bereken i^i, dat wil zeggen, schrijf dit als $a + bi$ waar $a, b \in \mathbb{R}$. Geef een exact antwoord, geen benadering.

a) $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$. Dus $|z| = \sqrt{2}$ en je hebt twee oplossingen voor z, namelijk $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i} = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3}) = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ en $z = \sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i} = \sqrt{2}(-1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$.
b) $i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ dus

$$i^i = (e^{\frac{1}{2}\pi i})^i = e^{\frac{1}{2}\pi i \cdot i} = e^{-\frac{1}{2}\pi} + 0i.$$

(Extra ruimte opgave 1)

Opgave 2. [8] Bekijk de kromme $y^4 + ye^{-x} - e^{4x} = 1$.
a) [4] Vind het punt P op de kromme waar $y = 1$.
b) [4] Geef de raaklijn in dit punt.

a)

$$1^4 + e^{-x} - e^{4x} = 1$$

dus $e^{-x} = e^{4x}$. Vermenigvuldig met e^x (die is nergens nul), en $1 = e^{5x}$ dus $5x = 0$ en dan $x = 0$. $P = (0,1)$ dus.
b) Impliciete differentiatie van $y^4 + ye^{-x} - e^{4x} = 1$ geeft

$$\frac{d}{dx}\left(y^4 + ye^{-x} - e^{4x}\right) = 0$$

$$y'(4y^3 + e^{-x}) - ye^{-x} - 4e^{4x} = 0$$

$$y' = \frac{ye^{-x} + 4e^{4x}}{4y^3 + e^{-x}}$$

En nu invullen $(x,y) = (0,1)$ krijgen we $y' = 1$. De raaklijn is dus

$$y = x + 1.$$

(Pssssst…geheimpje: $y = e^x$ is de enige oplossing. Dat had je kunnen afleiden door bijvoorbeeld te zeggen $y = e^x g$ en dan $e^{4x}g + e^x g e^{-x} - e^{4x} = 1$ geeft $e^{4x}(g-1) = 0$ dus $g = 1$.)

(Extra ruimte opgave 2)

Opgave 3. [8]

a) [4] Van de volgende reëelwaardige functie $(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, geef een reëelwaardige primitieve naar x :

$$\frac{2x+5}{x^2+4x+8}.$$

b) [4] Bereken

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\sin(x)\sqrt{2\sin^2(x)+\cos^2(x)}dx.$$

a) Allereerst, $\ln(x^2+4x+8)' = \frac{2x+4}{x^2+4x+8}$ (merk op, $x > 0$ dus er hoeven geen absolute waardes te staan), dus we hoeven alleen nog maar

$$\frac{1}{x^2+4x+8}$$

te integreren. De discriminant van het polynoom is $4^2 - 4 \cdot 8 < 0$ dus we moeten een arctangens-primitieve zoeken. (Want we mogen geen complexe getallen gebruiken, we willen een reelwaardige primitieve. Doe je het wel, krijg je misschien punten aftrek.) Schrijf $x^2+4x+8 = (x+2)^2+4$. Dus

$$\frac{1}{x^2+4x+8} = \frac{1/4}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}$$

en dus een primiteve is $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)$. Dus het volledige antwoord is

$$\ln(x^2+4x+8) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right).$$

b) Ik ben benieuwd wat voor een gruwelijkheden ik ga zien als er partieel geintegreerd wordt. Substitutie is de way to go here, ik kies voor $u = \sin(x)$ (maar $u = 2\sin^2(x) + \cos^2(x)$ zal ook werken). Na wat herschrijven en opmerken dat $du = \cos(x)dx$:

$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\sin(x)\sqrt{1+\sin^2(x)}dx = \int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} u\sqrt{1+u^2}du = \left[\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(1+\sin^2(x))^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

(Extra ruimte opgave 3)

Opgave 4. [8]

a) Bepaal

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 - 1}.$$

b) Convergeert of divergeert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

? Bewijs je antwoord.

a) Vermenigvuldig met *The Correct One*

$$1 = \frac{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3 + 1}}$$

geeft

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^3 - (n^3 - 1)}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3 + 1}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3 + 1}} = 0.$$

b) De ratio test geeft aan dat $\sum a_n$ convergeert als $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. Bekijk

$$\frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}} = \frac{(n+1)^4}{(n+1)n^4}$$

en die is 0 want de noemer is een polynoom van graad 5 en de teller een polynoom van graad 4. Dus de som convergeert.

Een alternatief is afschatten: voor $n > 4$ heb je $\frac{n^4}{n!} = \frac{n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{1}{(n-4)!} \leq 2^4 \frac{1}{(n-4)!}$ en deze laatste is sommeerbaar.

(Extra ruimte opgave 4)

Opgave 5. [8] Van een functie $y(x)$ is gegeven dat deze gedefinieerd is voor $x \geq 0$, en daar geldt $y(x) > 0$. Verder is gegeven dat $y(1) = 2, y'(1) = \frac{1}{2}$. De volgende differentiaalvergelijking geldt:

$$y''(y')^3 y^6 = -1.$$

Bepaal y.

Noem $v = y' = \frac{dy}{dx}$ en $v' = \frac{dv}{dy}$. Dan

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v'v.$$

Dus

$$\begin{aligned} v'v \cdot v^3 y^6 &= -1 \Rightarrow \\ v'v^4 y^6 &= -1 \Rightarrow \\ \frac{dv}{dy} v^4 y^6 &= -1 \Rightarrow \\ v^4 dv &= \frac{-1}{y^6} dy \Rightarrow \\ \frac{v^5}{5} &= \frac{1}{5y^5} + C \end{aligned}$$

Nu vul in, $x = 1$. Dan $y(1) = 2$ en $v(1) = y'(1) = \frac{1}{2}$. Dus

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} = \frac{1}{5 \cdot 2^5} + C \Longrightarrow C = 0.$$

Dus

$$\begin{aligned} v^5 &= \frac{1}{y^5} \Rightarrow \\ y' = v &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

en dat is een separabele vergelijking. Schrijf $y' = \frac{dy}{dx}$ en dan

$$y dy = 1 dx \Longrightarrow \frac{1}{2} y^2 = x + C.$$

Omdat $y(1) = 2$ volgt dat $C = 1$. Nu is dus $y^2 = 2x + 2$. Omdat $y > 0$ altijd, is $y = \sqrt{2x+2}$. Deze functie is inderdaad gedefinieerd overal op $x > 0$, dus deze voldoet.

(Extra ruimte opgave 5)

Opgave 6. [5] Vind alle oplossingen van functies $y : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ die voldoen aan
$$4x^2y'' + 8xy' - 15y = 15.$$

Eerst de homogene vergelijking $4x^2y'' + 8xy' - 15y = 0$. Dit is een Euler vergelijking, en die heeft alleen maar oplossingen van de vorm $y = \lambda x^r$ waar $r \in \mathbb{R}$. Dit geeft $4r(r-1) + 8r - 15 = 0$ dus $4r^2 + 4r - 15 = 0$. Dus $r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 15 \cdot 16}}{8} = \frac{-4 \pm 16}{8}$ dus $r = -\frac{5}{2}$ of $r = \frac{3}{2}$. Dus oplossingen voor de homogene vergelijking zijn van de vorm $Ax^{\frac{3}{2}} + Bx^{\frac{-5}{2}}$ waar $A, B \in \mathbb{R}$.

De inhomogene vergelijking kan ik makkelijk een oplossing gokken, ik gok een polynoom. Of heee, ik kan dat polynoom lineair kiezen. Wat zeg ik, een constante functie voldoet ! De functie $y = -1$!.

Dus alle oplossingen zijn $Ax^{\frac{3}{2}} + Bx^{\frac{-5}{2}} - 1$ waar $A, B \in \mathbb{R}$.

(Extra ruimte opgave 6)