Tentamen Differentieerbare variëteiten
16 januari 2024, 12:45–15:45

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van het boek, andere aantekeningen of een (grafische) rekenmachine zijn niet toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
- Je kunt maximaal 41 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/41 + 1$.
- Veel succes!

Opgave 1 (3 punten)**.** Zij M een gladde variëteit van dimensie m. Zij $U \subset M$ open, en zij $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^m$ zo dat $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ open is, en $\varphi \colon U \to \varphi(U)$ een diffeomorfisme is. Bewijs dat (U, φ) een kaart van M is. (D.w.z. dat (U, φ) bevat is in de impliciet gegeven maximale atlas voor M.)

Oplossing. Omdat $\varphi \colon U \to \varphi(U)$ een diffeomorfisme is, is dit ook een homeomorfisme (1). We moeten dus nog laten zien dat (U, φ) compatibel is met alle kaarten van M. Zij (V, ψ) zo'n kaart, met $U \cap V \neq \emptyset$. Dan is $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \mathbb{R}^m$ glad omdat ψ en φ^{-1} dat zijn (1). Net zo is $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) \to \mathbb{R}^m$ glad omdat ψ^{-1} en φ dat zijn (1).

Opgave 2. Beschouw de afbeelding $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

(Je mag gebruiken dat F glad is zonder dat te bewijzen.)

(a) [3 punten] Bewijs dat elke $\lambda \neq 0$ een reguliere waarde van F is.

(b) [1 punt] Bewijs dat voor alle $\lambda \neq 0$, de deelverzameling $F^{-1}(\lambda) \subset \mathbb{R}^3$ een ingebedde deelvariëteit is.

Vanaf nu bekijken de we ingebedde deelvariëteit $M := F^{-1}(-1) \subset \mathbb{R}^3$.

(c) [3 punten] Bewijs dat de deelverzamelingen $U_+, U_- \subset M$, gedefinieerd door

$$U_+ = \{(x, y, z) \in M; z > 0\};$$
$$U_- = \{(x, y, z) \in M; z < 0\}$$

een open overdekking van M vormen.

(d) [6 punten] Definieer $\varphi_+ \colon U_+ \to \mathbb{R}^2$ door $\varphi_+(x, y, z) = (x, y)$, voor $(x, y, z) \in U_+$. Bewijs dat φ_+ een diffeomorfisme is, met inverse gegeven door

$$(\varphi_+)^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vanwege (d) en Opgave 1 is (U_+, φ_+) een kaart van M. Net zo kunnen we laten zien dat $\varphi_-\colon U_- \to \mathbb{R}^2$, gegeven door $\varphi_-(x, y, z) = (x, y)$, voor $(x, y, z) \in U_-$ een kaart is, met inverse

$$(\varphi_-)^{-1}(x, y) = (x, y, -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

Dat hoef je nu niet te bewijzen. We krijgen zo een gladde atlas $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ voor M.

(e) [3 punten] Zij θ_+ de functie op M die constant 1 is op U_+, en nul op U_-. Zij θ_- de functie op M die constant 1 is op U_-, en nul op U_+. Bewijs dat $\{\theta_+, \theta_-\}$ een gladde partitie van 1 is op M, ondergeschikt aan de open overdekking $\{U_+, U_-\}$.

(f) [3 punten] Zij $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ met compacte drager. Zij $\iota\colon M \to \mathbb{R}^3$ de inclusie-afbeelding. Bewijs dat $\omega := \iota^*(f dx \wedge dz)$ een volumevorm op M is met compacte drager.

(g) [5 punten] Bewijs dat, met betrekking tot de oriëntatie waarvoor φ_+ en φ_- georiënteerd zijn,

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{yf(x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dx\, dy - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{yf(x, y, -\sqrt{x^2 + y^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dx\, dy.$$

Oplossing.

(a) Voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ heeft $DF(x, y, z)$ de matrix

$$(2x, 2y, -2z).$$

(1) Dus $DF(x, y, z)$, en dus $dF_{(x,y,z)}$, is surjectief dan en slechts dan als $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ (1). En als $\lambda \neq 0$, dan is $(0, 0, 0) \notin F^{-1}(\lambda)$, want $F(0, 0, 0) = 0$ (1).

(b) Dit volgt uit (a) en de submersiestelling.

(c) De inclusie-afbeelding van M in $\mathbb{R}^3$ is een inbedding, dus de topologie op M als gladde variëteit is hetzelfde als de deelruimtetopologie erop als deelruimte van $\mathbb{R}^3$ (1). En de verzamelingen $V_+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$ en $V_- := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z < 0\}$ zijn open in $\mathbb{R}^3$, dus $U_\pm = V_\pm \cap M$ is open in M (1). Als $x, y \in \mathbb{R}$, dan is $F(x, y, 0) = x^2 + y^2 \neq -1$, dus $(x, y, 0) \notin M$ (1). Dus $M = U_+ \cup U_-$.

(d) De projectie op de eerste twee coördinaten is glad als afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$. Dus de beperking van deze afbeelding tot de ingebedde deelvariëteit M is ook glad, en de beperking van de laatste afbeelding tot het open deel $U_+ \subset M$ ook. Dus φ_+ is glad. (1)

Definieer $\psi_+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ door

$$\psi_+(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

Omdat $x^2+y^2+1>0$ voor alle $x,y\in\mathbb{R}$, is ψ_+ glad (1). En $F(\psi_+(x,y))=-1$ voor alle $x,y\in\mathbb{R}$, dus het beeld van ψ_+ ligt in U_+ (1). Omdat $U_+\subset\mathbb{R}^3$ een ingebedde deelvariëteit is, is ψ_+ glad als afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar U_+ (1).

We zien direct dat $\varphi_+\circ\psi_+$ de identiteit is op $\mathbb{R}^2$ (1). En als $(x,y,z)\in U_+$, dan is $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$, dus $\psi_+\circ\varphi_+$ is de identiteit op U_+ (1).

(e) De functies $\theta_\pm\circ\varphi_\pm^{-1}$ zijn constant 0 of 1 voor alle 4 de combinaties van plussen en minnen, dus glad (1). Dus θ_+ en θ_- zijn glad. En $\mathrm{supp}(\theta_\pm)=U_\pm$, omdat $U_\pm$ zowel open als gesloten zijn (1). Tenslotte is $\theta_++\theta_-=1$ (1).

(f) Dit is een differentiaalvorm van graad 2, en de dimensie van M is 2 (1). Verder is M gesloten in $\mathbb{R}^3$ (1), dus $M\cap\mathrm{supp}(f)=\mathrm{supp}(\omega)$ is compact (1).

(g) Er geldt (3)

$$\begin{aligned}(\varphi_\pm^{-1})^*\omega &= (\iota\circ\varphi_\pm^{-1})^*(f\,dx\wedge dz)\\ &= f\circ\varphi_\pm^{-1}d(x\circ\iota\circ\varphi_\pm^{-1})\wedge d(z\circ\iota\circ\varphi_\pm^{-1})\\ &= f\circ\varphi_\pm^{-1}dx\wedge d(\pm\sqrt{x^2+y^2+1})\\ &= \pm f\circ\varphi_\pm^{-1}\cdot\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+1}}{\partial y}dx\wedge dy.\end{aligned}$$

En

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+1}}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Dus voor alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ is (1)

$$((\varphi_\pm^{-1})^*\omega)_{(x,y)}=\pm\frac{yf(x,y,\pm\sqrt{x^2+y^2+1})}{\sqrt{x^2+y^2+1}}(dx\wedge dy)_{(x,y)}. \tag{1}$$

Vanwege (e) is (1)

$$\int_M\omega=\int_{\mathbb{R}^2}(\varphi_+^{-1})^*\omega+\int_{\mathbb{R}^2}(\varphi_-^{-1})^*\omega.$$

De gevraagde gelijkheid volgt dus uit (1).

Opgave 3 (5 punten)**.** Stel dat X,Y gladde vectorvelden op $\mathbb{R}^m$ zijn. Schrijf, voor $x\in\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}X_x&=(X^1(x),\dots,X^m(x))\quad\in\mathbb{R}^m\cong T_x\mathbb{R}^m;\\ Y_x&=(Y^1(x),\dots,Y^m(x))\quad\in\mathbb{R}^m\cong T_x\mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Bewijs dat

$$[X,Y]=\big(X(Y^1)-Y(X^1),\dots,X(Y^m)-Y(X^m)\big).$$

Oplossing. We kunnen de definitie van X en Y herschrijven als (1)

$$X = \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial}{\partial x^j};$$
$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Dus (1)

$$[X, Y] = \sum_{j,k=1}^{m} [X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}].$$

Voor alle j, k is (1)

$$\begin{aligned}
&[X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}] \\
&\quad = X^j Y^k \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} + X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} - \left(Y^k X^j \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} + Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&\qquad = X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Dus (1)

$$\begin{aligned}
&[X, Y] = \\
&\sum_k \left(\sum_j X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_j \left(\sum_k Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \\
&\qquad \sum_k X(Y^k) \frac{\partial}{\partial x^k} - \sum_j Y(X^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Na identificeren van $\frac{\partial}{\partial x^k}$ met de k-de standaard basis vector, en hetzelfde met k vervangen door j, krijgen we de gevraagde gelijkheid. (1)

Opgave 4. Zij (U, φ) een kaart van een gladde variëteit M van dimensie m. Zij $j \in \{1, \dots, m\}$, en zij e_j de j-de standaard basisvector van $\mathbb{R}^m$. Stel dat $\varphi(U) \cap \mathbb{R}e_j \neq \emptyset$.

(a) [3 punten] Bewijs dat er een open interval J is zo dat $\gamma_j \colon J \to U$, gegeven door $\gamma_j(t) = \varphi^{-1}(te_j)$, een gladde kromme in U is.

(b) [3 punten] Beschouw de vectorvelden $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ op U gedefinieerd door φ. Bewijs dat γ_j een integraalkromme van $\frac{\partial}{\partial x^j}$ is.

(c) [3 punten] Bewijs dat $\frac{\partial}{\partial x^j}$ volledig is als $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$, maar dat de omgekeerde implicatie niet geldt.

Oplossing.

(a) De afbeelding $F_j\colon t \mapsto te_j$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^m$ is glad, en dus continu (1). Dus $F_j^{-1}(\varphi(U)) \subset \mathbb{R}$ is open (1). Zij $J \subset F_j^{-1}(\varphi(U))$ een open interval. Dan is $te_j \in \varphi(U)$ voor alle $t \in J$. Dus $\gamma_j(t) \in U$ voor alle $t \in J$. En γ is glad omdat F_j en φ^{-1} dat zijn (1).

(b) Voor alle $t \in J$ is (1)

$$\gamma_j'(t) = d(\varphi^{-1})_{te_j}\left(\frac{d}{ds}(se_j)|_{s=t}\right). \tag{2}$$

Voor alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ is (1)

$$\frac{d}{ds}(se_j)|_{s=t}(f) = \frac{d}{ds}f(se_j)|_{s=t} = \frac{\partial f}{\partial x^j}(te_j).$$

Dus $\frac{d}{ds}(se_j)|_{s=t} = \frac{\partial}{\partial x^j}|_{te_j}$. Dus de rechterkant van (2) is (1)

$$d(\varphi^{-1})_{te_j}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_{te_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_{\gamma_j(t)}.$$

(c) Als $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$, dan is $F_j^{-1}(\varphi(U)) = \mathbb{R}$, dus mogen we $J = \mathbb{R}$ nemen (1).

Neem bijvoorbeeld $M = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$, en $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$ de inclusie. Dan is $F_j^{-1}(\varphi(U)) = \mathbb{R}$ voor $j = 1, 2$, dus $\frac{\partial}{\partial x^j}$ is volledig. Maar $\varphi(U) = U \neq \mathbb{R}^2$. (1 punt voor correct voorbeeld, 1 voor bewijs)