Tentamen Differentieerbare variëteiten
16 januari 2024, 12:45–15:45

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van het boek, andere aantekeningen of een (grafische) rekenmachine zijn niet toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
- Je kunt maximaal 41 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/41 + 1$.
- Veel succes!

Opgave 1 (3 punten)**.** Zij M een gladde variëteit van dimensie m. Zij $U \subset M$ open, en zij $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ zo dat $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ open is, en $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ een diffeomorfisme is. Bewijs dat (U, φ) een kaart van M is. (D.w.z. dat (U, φ) bevat is in de impliciet gegeven maximale atlas voor M.)

Opgave 2. Beschouw de afbeelding $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

(Je mag gebruiken dat F glad is zonder dat te bewijzen.)

(a) [3 punten] Bewijs dat elke $\lambda \neq 0$ een reguliere waarde van F is.

(b) [1 punt] Bewijs dat voor alle $\lambda \neq 0$, de deelverzameling $F^{-1}(\lambda) \subset \mathbb{R}^3$ een ingebedde deelvariëteit is.

Vanaf nu bekijken de we ingebedde deelvariëteit $M := F^{-1}(-1) \subset \mathbb{R}^3$.

(c) [3 punten] Bewijs dat de deelverzamelingen $U_+, U_- \subset M$, gedefinieerd door

$$U_+ = \{(x, y, z) \in M; z > 0\};$$
$$U_- = \{(x, y, z) \in M; z < 0\}$$

een open overdekking van M vormen.

(d) [6 punten] Definieer $\varphi_+\colon U_+ \to \mathbb{R}^2$ door $\varphi_+(x, y, z) = (x, y)$, voor $(x, y, z) \in U_+$. Bewijs dat φ_+ een diffeomorfisme is, met inverse gegeven door

$$(\varphi_+)^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vanwege (d) en Opgave 1 is (U_+, φ_+) een kaart van M. Net zo kunnen we laten zien dat $\varphi_-\colon U_- \to \mathbb{R}^2$, gegeven door $\varphi_-(x, y, z) = (x, y)$, voor $(x, y, z) \in U_-$ een kaart is, met inverse

$$(\varphi_-)^{-1}(x, y) = (x, y, -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}).$$

Dat hoef je nu niet te bewijzen. We krijgen zo een gladde atlas $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ voor M.

(e) [3 punten] Zij θ_+ de functie op M die constant 1 is op U_+, en nul op U_-. Zij θ_- de functie op M die constant 1 is op U_-, en nul op U_+. Bewijs dat $\{\theta_+, \theta_-\}$ een gladde partitie van 1 is op M, ondergeschikt aan de open overdekking $\{U_+, U_-\}$.

(f) [3 punten] Zij $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ met compacte drager. Zij $\iota\colon M \to \mathbb{R}^3$ de inclusie-afbeelding. Bewijs dat $\omega := \iota^*(f dx \wedge dz)$ een volumevorm op M is met compacte drager.

(g) [5 punten] Bewijs dat, met betrekking tot de oriëntatie waarvoor φ_+ en φ_- georiënteerd zijn,

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{yf(x,y,\sqrt{x^2+y^2+1})}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\, dx\, dy - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{yf(x,y,-\sqrt{x^2+y^2+1})}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\, dx\, dy.$$

Opgave 3 (5 punten)**.** Stel dat X, Y gladde vectorvelden op $\mathbb{R}^m$ zijn. Schrijf, voor $x \in \mathbb{R}^m$,

$$X_x = (X^1(x), \ldots, X^m(x)) \quad \in \mathbb{R}^m \cong T_x\mathbb{R}^m;$$
$$Y_x = (Y^1(x), \ldots, Y^m(x)) \quad \in \mathbb{R}^m \cong T_x\mathbb{R}^m.$$

Bewijs dat

$$[X, Y] = \big(X(Y^1) - Y(X^1), \ldots, X(Y^m) - Y(X^m)\big).$$

Opgave 4. Zij (U, φ) een kaart van een gladde variëteit M van dimensie m. Zij $j \in \{1, \ldots, m\}$, en zij e_j de j-de standaard basisvector van $\mathbb{R}^m$. Stel dat $\varphi(U) \cap \mathbb{R}e_j \neq \emptyset$.

(a) [3 punten] Bewijs dat er een open interval J is zo dat $\gamma_j\colon J \to U$, gegeven door $\gamma_j(t) = \varphi^{-1}(te_j)$, een gladde kromme in U is.

(b) [3 punten] Beschouw de vectorvelden $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ op U gedefinieerd door φ. Bewijs dat γ_j een integraalkromme van $\frac{\partial}{\partial x^j}$ is.

(c) [3 punten] Bewijs dat $\frac{\partial}{\partial x^j}$ volledig is als $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$, maar dat de omgekeerde implicatie niet geldt.