

Enkele opmerkingen:

- Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.
- Als je de ruimte tijdelijk verlaat, geef dan a.j.b. je mobiele telefoon aan de surveillanten.
- Je mag het tentamen zowel in het Engels als in het Nederlands maken.
- Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op elk blad dat je inlevert.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Je mag de formules gebruiken: $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Opgave 1. 20pnt. Zij $f(x, y, z) = e^{x-y^2} \cos(z)$. Bereken

- ∇f .
- De richtingsafgeleide van f in de richting $(1, 2, 3)$ in het punt $(0, 0, 0)$.
- $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z)$.
- Het Taylorpolynoom van tweede orde van f rond het punt $(0, 0, 0)$.

Opgave 2. 15pnt. Zij D het gebied in \mathbb{R}^2 beschreven door de ongelijkheid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1.$$

- Maak een schets van D .
- Bepaal het minimum en het maximum van de functie $h(x, y) = x + 2y$ op D .

Opgave 3. 15pnt. Beschouw de functie $g(x, y) = e^{x+y^2}$ en het vectorveld

$$\mathbf{V} = \frac{-2y}{1+x^2} \mathbf{i} + \frac{1}{1+x^2} \mathbf{j}.$$

- Maak een schets van de niveaucrommen van g .
- Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de niveaucromme van g door het punt $(3, -1)$.
- Toon aan dat de veldlijnen van het vectorveld \mathbf{V} met de niveaucrommen van de functie g samenvallen.

Opgave 4. 20pnt. Zij G het gebied in \mathbb{R}^3 beschreven door de ongelijkheden:

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

Bereken

$$\iiint_G \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tip: gebruik bolcoördinaten.

Opgave 5. 30pnt. Zij \mathcal{S} het oppervlak in \mathbb{R}^3 beschreven door

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad 0 \leq z \leq y^2.$$

We oriënteren \mathcal{S} zó dat de positieve zijde van \mathcal{S} vanuit het punt $(0, 0, 0)$ zichtbaar is. Op de rand \mathcal{C} van \mathcal{S} nemen we de geïnduceerde oriëntatie. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F} = \cos\left(\frac{x}{x+y}\right) \mathbf{i} + \sin\left(\frac{x}{x+y}\right) \mathbf{j} + e^z(x^2 - y^2) \mathbf{k}.$$

- Maak een schets van \mathcal{S} . Geef op de tekening de oriëntatie van \mathcal{C} aan.
- Bereken $\text{rot}(\mathbf{F})$.
- Vind een georiënteerde parametrisatie $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathcal{S}$, en bereken $d\mathbf{S}$ in deze parametrisatie.
- Bereken de kringintegraal van \mathbf{F} op \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Tip: gebruik een integraalstelling.