Tentamen Discrete Wiskunde

Schrijf op ieder ingeleverd blad duidelijk leesbaar je naam en studentnummer.

Opgave 1. De zeef van Eratosthenes is een leuke, maar niet zeer efficiënte manier om priemgetallen te vinden. En simpel alternatief werkt als volgt:
Dat 2, 3, 5 en 7 de priemgetallen < 10 zijn, weet je wel. Vanaf 10 test je alleen getallen op primaliteit die door geen van 2, 3, 5 en 7 deelbaar zijn.

Hoeveel getallen tussen 10 en 1000 moet je bij deze methode testen om de 164 priemgetallen tussen 10 en 1000 te vinden, wat is de succes rate (percentage priemgetallen onder de geteste getallen)?

Oplossing: Het aantal getallen $\leq n$ dat deelbaar is door d is $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$. Volgens het inclusie/exclusie principe is het aantal getallen tussen 1 en 1000 dat door geen van 2, 3, 5 en 7 deelbaar is

$$\begin{aligned}
1000 &- \left(\left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor \right) \\
&+ \left(\left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5\cdot 7} \right\rfloor \right) \\
&- \left(\left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \right) \\
&+ \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \\
= 1000 &- (500 + 333 + 200 + 142) + (166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28) - (33 + 23 + 14 + 9) + 4 \\
= 1000 &- 1175 + 478 - 79 + 4 = 228
\end{aligned}$$

Omdat we pas bij 10 beginnen te testen, moeten we hiervan nog 1 aftrekken (voor de 1, het enige getal < 10 dat niet door 2, 3, 5 of 7 deelbaar is), dus moeten we 227 getallen op primaliteit testen. De succes rate is dus een indrukwekkende $\frac{164}{227} \approx 72\%$!

Opgave 2. De rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ is gegeven door

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1 \quad \text{en} \quad a_n = n\, a_{n-1} + n(n-1)\, a_{n-2} \text{ voor } n \geq 2.$$

Leid een directe formule af voor a_n.

Hint: Ga na dat voor de gulden snede $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ geldt dat $\dfrac{1}{1-\tau x} + \dfrac{1}{1-(1-\tau)x} = \dfrac{2-x}{1-x-x^2}$.

Oplossing: Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ de EGF van deze rij. Volgens de aangegeven recursie is dan

$$\begin{aligned} f(x) - (2+x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\, a_{n-1}}{n!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)\, a_{n-2}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} x^n = x \cdot (f(x) - 2) + x^2 \cdot f(x). \end{aligned}$$

en dus

$$f(x)(1 - x - x^2) = 2 - x \quad \text{d.w.z.} \quad f(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

Met de gulden snede $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ volgt $(1 - x - x^2) = (1 - \tau x)(1 - (1-\tau)x)$, want $\tau(1-\tau) = \tau - \tau^2 = -1$.
Breuksplitsing geeft nu

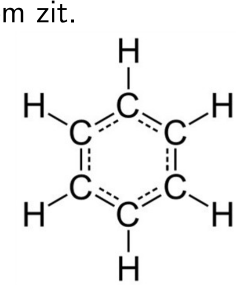
$$\frac{2-x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\tau x} + \frac{B}{1-(1-\tau)x} = \frac{A - A(1-\tau)x + B - B\tau x}{1-x-x^2}$$

en vergelijk van de coëfficiënten geeft de vergelijkingen $A + B = 2$ en $A(1-\tau) + B\tau = 1$. Deze hebben de oplossing $A = B = 1$ (zie hint) en we concluderen dat

$$f(x) = \frac{1}{1-\tau x} + \frac{1}{1-(1-\tau)x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau^n + (1-\tau)^n)\, x^n$$

Omdat $f(x)$ de EGF van de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ is, is $\frac{a_n}{n!} = \tau^n + (1-\tau)^n$, dus $a_n = n!(\tau^n + (1-\tau)^n)$.

Opgave 3. Een benzeenmolecuul bestaat uit 6 koolstofatomen in een ring waarbij aan elk koolstofatoom nog een waterstofatoom zit.



(i) Bepaal de cykelindex van de symmetriegroep van het benzeenmolecuul (dit is een groep van orde 12).

(ii) Hoeveel verschillende moleculen zijn er mogelijk als je de keuze hebt om elk waterstofatoom wel of niet te vervangen door een chlooratoom of een alcohol-molecuul?

(iii) Hoeveel verschillende moleculen zijn er mogelijk als je precies drie waterstofatomen vervangt door of een chlooratoom of een alcohol-molecuul?

Oplossing:

(i) De symmetriegroep $G \cong D_6$ is voortgebracht door een rotatie r van 60 graden (dus van orde 6) en een spiegeling s door tegenoverliggende koolstofatomen. De elementen van G zijn dan de rotaties r^i met $0 \le i < 6$ en de spiegelingen sr^i met $0 \le i < 6$. De cykeltypen van de elementen en de corresponderende termen in de cykelindex zijn:

permutaties	cykeltype	term in cykelindex
$r^0 = id$	1^6	z_1^6
r, r^5	6^1	z_6
r^2, r^4	3^2	z_3^2
r^3	2^3	z_2^3
s, sr^2, sr^4	$1^2 2^2$	$z_1^2 z_2^2$
sr, sr^3, sr^5	2^3	z_2^3

De cykelindex van de groep is dus:

$$Z(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \frac{1}{12}\left(z_1^6 + 2z_6 + 2z_3^2 + 4z_2^3 + 3z_1^2 z_2^2\right).$$

(ii) We kunnen waterstof, chloor en alcohol als kleuren van de met de koolstofatomen verbonden atomen opvatten. Het aantal verschillende moleculen vinden we dan door in de cykelindex z_i door 3 te substitueren, dit geeft $\frac{1}{12}(3^6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2) = 92$.

(iii) De patronentelreeks voor de kleuren a (alcohol), c (chloor) en h (waterstof) is

$$\frac{1}{12}\Big((a+c+h)^6 + 2(a^6 + c^6 + h^6) + 2(a^3 + c^3 + h^3)^2 + 4(a^2 + c^2 + h^2)^3 + 3(a+c+h)^2(a^2 + c^2 + h^2)^2\Big)$$

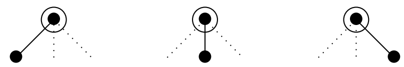
Het aantal moleculen met precies 3 waterstofatomen vinden we als coëfficiënt van h^3 als we a en c door 1 substitueren, d.w.z. in

$$\frac{1}{12}\left((2+h)^6 + 2(2+h^6) + 2(2+h^3)^2 + 4(2+h^2)^3 + 3(2+h)^2(2+h^2)^2\right)$$

Alleen in $(2+h)^6$, $2(2+h^3)^2$ en $3(2+h)^2(2+h^2)^2$ treedt h^3 op, de coëfficiënt van h^3 is

$$\frac{1}{12}\left(\binom{6}{3}2^3 + 2 \cdot (2 \cdot 2) + 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2)\right) = \frac{1}{12}(160 + 8 + 48) = 18.$$

Opgave 4. Een *ternaire boom* is een boom met een wortel waarin iedere knoop hoogstens 3 kinderen kan hebben, een linkerkind, een middenkind en een rechterkind. Het aantal ternaire bomen met n knopen noteren we met t_n, bijvoorbeeld is $t_1 = 1$ (boom bestaat alleen uit de wortel) en $t_2 = 3$ (wortel heeft of een linker- of een midden- of een rechterkind).



We spreken nog af dat $t_0 := 1$.

(i) Ga na dat $t_3 = 12$ door de verschillende ternaire bomen te tekenen.

(ii) Geef voor $n \geq 1$ een recursieve relatie voor t_n aan. Controleer met behulp van deze recursie dat $t_4 = 55$.

Hint: Weghalen van de wortel levert drie ternaire bomen op.

(iii) Zij $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ de OGF van de rij $\{t_n\}_{n\geq 0}$.

Bewijs dat $T(x) = 1 + x\big(T(x)\big)^3$.

Oplossing:

(i) Er zijn 9 bomen van hoogte 2 (linker-, midden- of rechterkind van een linker-, midden- of rechterkind van de wortel) en 3 bomen van hoogte 1 (linker-, midden- of rechterkind van de wortel ontbreekt).

(ii) Weghalen van de wortel geeft drie ternaire bomen met i, j en k knopen zo dat $i+j+k = n-1$. Hieruit volgt

$$t_n = \sum_{i+j+k=n-1} t_i t_j t_k = \sum_{i=0}^{n-1} t_i \sum_{j=0}^{n-1-i} t_j t_{n-1-i-j}.$$

Voor $n = 4$ loopt de som over de tripels $(0,0,3)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(0,3,0)$, $(1,0,2)$, $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(2,0,1)$, $(2,1,0)$, $(3,0,0)$ en met $t_0 = t_1 = 1$, $t_2 = 3$ en $t_3 = 12$ volgt hieruit $t_4 = 12+3+3+12+3+1+3+3+3+12 = 55$.

(iii) Volgens de convolutiestelling is $\sum_{j=0}^{n-1-i} t_j t_{n-1-i-j}$ de coëfficiënt van x^{n-1-i} in $T(x)^2$ en nog een keer toepassen van de convolutiestelling geeft dat $\sum_{i=0}^{n-1} t_i \sum_{j=0}^{n-1-i} t_j t_{n-1-i-j}$ de coëfficiënt is van x^{n-1} in $T(x)^3$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} T(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \sum_{j=0}^{n-1-i} t_j t_{n-1-i-j} \right) x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} [\![T(x)^3]\!]_{x^{n-1}} x^{n-1} = x\big(T(x)\big)^3. \end{aligned}$$

Opgave 5. Een Steiner tripel systeem $(V, \mathcal{B})$ is een $(b, v, r, 3, 1)$-design.
Een deelverzameling $W \subseteq V$ heet een *deelsysteem* als $|B \cap W| \neq 2$ voor iedere blok $B \in \mathcal{B}$, d.w.z. als W twee punten uit een blok bevat, dan ligt het hele blok in W.

(i) Geef de parameters b en r van een Steiner tripel systeem aan (afhankelijk van v).

(ii) Zij W een deelsysteem van een Steiner tripel systeem $(V, \mathcal{B})$ en zij $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq W\}$ de verzameling van blokken die volledig in W liggen.

Laat zien dat $(W, \mathcal{C})$ een Steiner tripel systeem is en bepaal de parameters van dit design (afhankelijk van $w = |W|$).

(iii) Zij W een deelsysteem met $w = |W| < v$. Bewijs dat $v \geq 2w + 1$.

Hint: Tel blokken in $\mathcal{B}$ met een punt buiten W.

Oplossing:

(i) Uit de algemene relatie $r(k-1) = \lambda(v-1)$ volgt $r = \frac{v-1}{2}$ en hiermee volgt uit $bk = vr$ dat $b = \frac{v(v-1)}{6}$.

(ii) Omdat de blokken in $\mathcal{C}$ blokken uit $\mathcal{B}$ zijn, is het duidelijk dat $(W, \mathcal{C})$ k-uniform is voor $k = 3$.

Zij $y, y' \in W$. Dan is er een eenduidige blok $B \in \mathcal{B}$ met $y, y' \in B$ en omdat W een deelsysteem is geldt dan $B \in \mathcal{C}$. Dit betekent dat $(W, \mathcal{C})$ λ-gebalanceerd is voor $\lambda = 1$.

Zij nu $y \in W$. Een verder element $y' \in W \setminus \{y\}$ legt een eenduidige blok $B \in \mathcal{C}$ vast, deze wordt twee keer verkregen (namelijk naast door y' door het derde element in B), dus ligt y in $\frac{w-1}{2}$ blokken in $\mathcal{C}$. Dit betekent dat $(W, \mathcal{C})$ r-regulier is voor $r = \frac{w-1}{2}$.

Hieruit volgt dat $(W, \mathcal{C})$ inderdaad een Steiner tripel systeem is, het aantal blokken is $\frac{w(w-1)}{6}$.

(iii) Zij $x \in V \setminus W$. Voor iedere $y \in W$ is er een eenduidige blok $B \in \mathcal{B}$ met $x, y \in B$, dus zijn er $|W|$ blokken in $\mathcal{B}$ die x en een punt uit W bevatten. In totaal ligt x in $\frac{v-1}{2}$ blokken uit $\mathcal{B}$, dus is $w \leq \frac{v-1}{2}$, d.w.z. $2w + 1 \leq v$.

Opgave 6. Gegeven zijn twee eindige posets $\mathbf{P} = (X, \leq_X)$ en $\mathbf{Q} = (Y, \leq_Y)$ en hun product $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (X \times Y, \preceq)$ waarbij $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_X x_2$ en $y_1 \leq_Y y_2$.

(i) Geef een antiketen in $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ met $breedte(\mathbf{P}) \cdot breedte(\mathbf{Q})$ elementen aan.

(ii) Laat zien dat er geen functie $f(n, m)$ bestaat zo dat $breedte(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \leq f(n, m)$ voor alle posets $\mathbf{P}$ en $\mathbf{Q}$ met $breedte(\mathbf{P}) = n$ en $breedte(\mathbf{Q}) = m$.

(iii) Bewijs dat $hoogte(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = hoogte(\mathbf{P}) + hoogte(\mathbf{Q}) - 1$.

Oplossing:

(i) Zij $x_1, \ldots, x_n$ een maximale antiketen in $\mathbf{P}$ en $y_1, \ldots, y_m$ een maximale antiketen in $\mathbf{Q}$. Dan vormen de paren (x_i, y_j) met $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$ een antiketen in $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ want twee van deze paren zijn in geen van de twee componenten vergelijkbaar.

(ii) Voor $\mathbf{P}$ een keten met k elementen $1 \leq 2 \leq \ldots \leq k$ is $breedte(\mathbf{P}) = 1$, maar $breedte(\mathbf{P} \times \mathbf{P}) \geq k$, want de elementen $(1, k), (2, k-1), \ldots, (k, 1)$ vormen een antiketen in $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$. Dit betekent dat al voor $n = m = 1$ geldt dat $breedte(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ onbegrensd is.

(iii) Zij $x_1, \ldots, x_n$ een maximale keten in $\mathbf{P}$ en $y_1, \ldots, y_m$ een maximale keten in $\mathbf{Q}$. Dan vormen de paren $(x_1, y_1), (x_2, y_1), \ldots, (x_n, y_1), (x_n, y_2), \ldots, (x_n, y_m)$ een keten van lengte $n + m - 1$.

Stel nu er is een keten $(x_{i_1}, y_{j_1}) \preceq \ldots \preceq (x_{i_k}, y_{j_k})$ van lengte k. Dan vormen de eerste componenten van deze keten een keten in $\mathbf{P}$ als we dubbele elementen weglaten, net zo vormen de tweede componenten een keten in $\mathbf{Q}$. Maar de eerste componenten kunnen slechts op $n-1$ plekken in de keten veranderen, de tweede componenten slechts op $m-1$ plekken en omdat alle elementen in de keten verschillend zijn, kan de keten hoogstens lengte $(n-1) + (m-1) + 1 = n + m - 1$ hebben.