Discrete Wiskunde (WB011C) **16 januari 2017**

Tentamen Discrete Wiskunde

Schrijf op ieder ingeleverd blad duidelijk leesbaar je naam en studentnummer.

Opgave 1. De zeef van Eratosthenes is een leuke, maar niet zeer efficiënte manier om priemgetallen te vinden. En simpel alternatief werkt als volgt:
Dat 2, 3, 5 en 7 de priemgetallen < 10 zijn, weet je wel. Vanaf 10 test je alleen getallen op primaliteit die door geen van 2, 3, 5 en 7 deelbaar zijn.

Hoeveel getallen tussen 10 en 1000 moet je bij deze methode testen om de 164 priemgetallen tussen 10 en 1000 te vinden, wat is de succes rate (percentage priemgetallen onder de geteste getallen)?

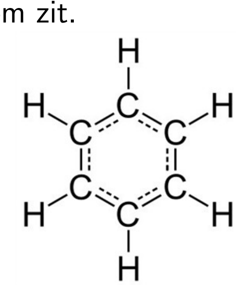
Opgave 2. De rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ is gegeven door

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1 \quad \text{en} \quad a_n = n\,a_{n-1} + n(n-1)\,a_{n-2} \text{ voor } n \geq 2.$$

Leid een directe formule af voor a_n.

Hint: Ga na dat voor de gulden snede $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ geldt dat $\dfrac{1}{1-\tau x} + \dfrac{1}{1-(1-\tau)x} = \dfrac{2-x}{1-x-x^2}$.

Opgave 3. Een benzeenmolecuul bestaat uit 6 koolstofatomen in een ring waarbij aan elk koolstofatoom nog een waterstofatoom zit.



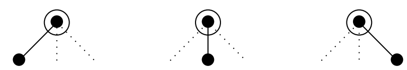
(i) Bepaal de cykelindex van de symmetriegroep van het benzeenmolecuul (dit is een groep van orde 12).

(ii) Hoeveel verschillende moleculen zijn er mogelijk als je de keuze hebt om elk waterstofatoom wel of niet te vervangen door een chlooratoom of een alcohol-molecuul?

(iii) Hoeveel verschillende moleculen zijn er mogelijk als je precies drie waterstofatomen vervangt door of een chlooratoom of een alcohol-molecuul?

z.o.z. voor Opgaven 4 t/m 6

Opgave 4. Een *ternaire boom* is een boom met een wortel waarin iedere knoop hoogstens 3 kinderen kan hebben, een linkerkind, een middenkind en een rechterkind. Het aantal ternaire bomen met n knopen noteren we met t_n, bijvoorbeeld is $t_1 = 1$ (boom bestaat alleen uit de wortel) en $t_2 = 3$ (wortel heeft of een linker- of een midden- of een rechterkind).



We spreken nog af dat $t_0 := 1$.

(i) Ga na dat $t_3 = 12$ door de verschillende ternaire bomen te tekenen.

(ii) Geef voor $n \geq 1$ een recursieve relatie voor t_n aan. Controleer met behulp van deze recursie dat $t_4 = 55$.

Hint: Weghalen van de wortel levert drie ternaire bomen op.

(iii) Zij $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ de OGF van de rij $\{t_n\}_{n\geq 0}$.

Bewijs dat $T(x) = 1 + x\big(T(x)\big)^3$.

Opgave 5. Een Steiner tripel systeem $(V, \mathcal{B})$ is een $(b, v, r, 3, 1)$-design.
Een deelverzameling $W \subseteq V$ heet een *deelsysteem* als $|B \cap W| \neq 2$ voor iedere blok $B \in \mathcal{B}$, d.w.z. als W twee punten uit een blok bevat, dan ligt het hele blok in W.

(i) Geef de parameters b en r van een Steiner tripel systeem aan (afhankelijk van v).

(ii) Zij W een deelsysteem van een Steiner tripel systeem $(V, \mathcal{B})$ en zij $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq W\}$ de verzameling van blokken die volledig in W liggen.

Laat zien dat $(W, \mathcal{C})$ een Steiner tripel systeem is en bepaal de parameters van dit design (afhankelijk van $w = |W|$).

(iii) Zij W een deelsysteem met $w = |W| < v$. Bewijs dat $v \geq 2w + 1$.

Hint: Tel blokken in $\mathcal{B}$ met een punt buiten W.

Opgave 6. Gegeven zijn twee eindige posets $\mathbf{P} = (X, \leq_X)$ en $\mathbf{Q} = (Y, \leq_Y)$ en hun product $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (X \times Y, \preceq)$ waarbij $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_X x_2$ en $y_1 \leq_Y y_2$.

(i) Geef een antiketen in $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ met $breedte(\mathbf{P}) \cdot breedte(\mathbf{Q})$ elementen aan.

(ii) Laat zien dat er geen functie $f(n, m)$ bestaat zo dat $breedte(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \leq f(n, m)$ voor alle posets $\mathbf{P}$ en $\mathbf{Q}$ met $breedte(\mathbf{P}) = n$ en $breedte(\mathbf{Q}) = m$.

(iii) Bewijs dat $hoogte(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = hoogte(\mathbf{P}) + hoogte(\mathbf{Q}) - 1$.

Succes ermee!