Tentamen Discrete Wiskunde

- Schrijf op ieder ingeleverd blad duidelijk leesbaar je naam en studentnummer.
- De opgaven 1 t/m 6 tellen alle even zwaar.
- **Je hoeft slechts 5 van de 6 opgaven in te leveren! Als je alle opgaven maakt, telt de opgave met de minste punten niet mee.**

Opgave 1. We noteren met $P(n,k)$ het aantal partities van $n \in \mathbb{N}$ in k delen en met $P(n)$ het aantal partities van $n \in \mathbb{N}$ in een willekeurig aantal delen.

(i) Bewijs dat $P(n) = P(2n,n)$. Geef alle partities van 10 in 5 delen aan.

(ii) Zij $d \in \mathbb{N}$ vast gekozen. Bewijs dat de rij $\{P(n,n-d)\}_{n\in\mathbb{N},\, n\geq d}$ constant wordt. Wat is deze constante waarde en vanaf welke n neemt de rij deze waarde aan?

Oplossing:

(i) We definiëren een afbeelding van partities van $2n$ in n delen naar partities van n door $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mapsto (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_k - 1)$, waarbij $a_k > 1$ en $a_i = 1$ voor $i > k$, d.w.z. we trekken 1 van ieder deel af en schrappen de delen die op deze manier nul worden. Dit is duidelijk een injectieve afbeelding, maar hij is ook surjectief, want voor $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ een partitie van n is $(b_1+1) + (b_2+1) + \ldots + (b_k+1) + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-k}$ een partitie van $2n$ in n delen die juist op $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ afgebeeld wordt.

$P(5) = 7$ met partities 5, $4+1$, $3+2$, $3+1+1$, $2+2+1$, $2+1+1+1$, $1+1+1+1+1$. De boven gedefinieerde afbeelding geeft dan de volgende partities van 10 in 5 delen: $6+1+1+1+1$, $5+2+1+1+1$, $4+3+1+1+1$, $4+2+2+1+1$, $3+3+2+1+1$, $3+2+2+2+1$, $2+2+2+2+2$.

(ii) Door van ieder deel van een partitie 1 af te trekken hebben we een bijectie tussen de partities van n in k delen en de partities van $n-k$ in hoogstens k delen. Daarom is $P(n,n-d)$ gelijk aan het aantal partities van d in hoogstens $n-d$ delen. Maar een partitie van d heeft hoogstens d delen, dus blijft dit aantal voor $n-d \geq d$ constant. Aan de andere kant laat de partitie $d = 1 + 1 + \ldots + 1$ zien dat het aantal niet eerder dan bij $n-d = d$ constant wordt. Hieruit volgt dat de rij $\{P(n,n-d)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vanaf $n = 2d$ constant wordt. De constante waarde is dan $P(d)$, d.w.z. het aantal partities van d.

Opgave 2.

(i) Zij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de rij gegeven door $a_n = 2^n - 2$. Geef de OGF en de EGF van deze rij in gesloten vorm aan.

(ii) Leid een directe formule af voor de rij $\{b_n\}_{n\geq 0}$ gegeven door $b_0 = 2$ en $b_n = n\, b_{n-1} - n!$ voor $n \geq 1$.

Hint: Overweeg het gebruik van een EGF.

Oplossing:

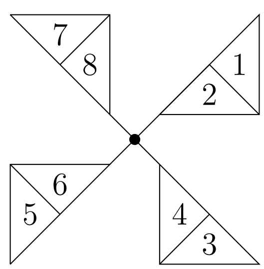
(i) De OGF van deze rij is $\sum_{n\geq 0} 2^n\, x^n - \sum_{n\geq 0} 2\, x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{1-x} = \frac{-1+3x}{(1-2x)(1-x)}$ (de laatste stap is niet per se nodig).

De EGF van deze rij is $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}\, x^n - \sum_{n\geq 0} \frac{2}{n!}\, x^n = e^{2x} - 2e^x$.

(ii) Zij $g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$ de EGF van deze rij. Volgens de aangegeven recursie is dan $g(x) - 2 = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n!} x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{n\, b_{n-1}}{n!} x^n - \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{b_{n-1}}{(n-1)!} x^n - \sum_{n\geq 1} x^n = x \cdot g(x) - \frac{x}{1-x}$. Hieruit volgt $g(x)(1-x) = 2 - \frac{x}{1-x}$ en dus $g(x) = \frac{2}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0} 2\, x^n - \sum_{n\geq 1} n\, x^n$. Dit geeft $\frac{b_n}{n!} = 2 - n$ en dus $b_n = (2-n)n!$ voor $n \geq 1$ (geldt echter ook voor $n = 0$).

Dit laat zich natuurlijk ook gokken door de eerste paar termen van de rij uit te schrijven.

Opgave 3. We kleuren de acht vlakken van het hieronder afgebeelde windwiel. Twee kleuringen beschouwen we hierbij als equivalent als ze door een draaiing van het wiel in elkaar overgevoerd kunnen worden (de achterkant blijft gewoon grijs).



(i) Bepaal de cykel index van deze werking van de cyklische groep C_4.

(ii) Hoeveel inequivalente kleuringen met twee kleuren zijn er, en hoeveel met drie?

(iii) Stel je gebruikt de kleuren rood en geel. Hoeveel inequivalente kleuringen zijn er, waarbij je rood

(a) precies vier keer gebruikt;

(b) een oneven aantal keer gebruikt?

Oplossing:

(i) Zij g een voortbrenger van de cyklische groep, dan hebben g en g^3 cykelstructuur 4^2 en g^2 heeft cykelstructuur 2^4. Samen met 1^8 voor de identiteit geeft dit de cykel index $Z(z_1, \ldots, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^8 + z_2^4 + 2z_4^2)$.

(ii) Substitueren van het aantal kleuren in de cykel index geeft juist de CFB-stelling, het aantal kleuringen met 2 kleuren is dus $\frac{1}{4}(2^8 + 2^4 + 2 \cdot 2^2) = \frac{1}{4}(256 + 16 + 8) = 70$, het aantal kleuringen met 3 kleuren is $\frac{1}{4}(3^8 + 3^4 + 2 \cdot 3^2) = \frac{1}{4}(6561 + 81 + 18) = 1665$,

(iii) Hiervoor geven we de kleur rood het gewicht r en geel het gewicht 1. In de cykel index substitueren we nu z_i door $r^i + 1^i$, dit geeft $\frac{1}{4}((r+1)^8 + (r^2+1)^4 + 2(r^4+1)^2)$.

(a) De coëfficiënt van r^4 geeft het aantal kleuringen aan waarbij rood vier keer gebruikt wordt, dit is $\frac{1}{4}(\binom{8}{4} + \binom{4}{2} + 2 \cdot 2) = \frac{1}{4}(70 + 6 + 4) = 20$.

(b) Als rood een oneven aantal keer gebruikt wordt, geldt dat ook voor geel, het is dus voldoende het aantal kleuringen met één keer en drie keer rood te tellen, wegens symmetrie zijn deze aantallen gelijk aan die voor zeven en vijf keer rood. De coëfficiënt van r^1 in $\frac{1}{4}((r+1)^8 + (r^2+1)^4 + 2(r^4+1)^2)$ is gewoon $\frac{1}{4} \cdot \binom{8}{1} = 2$ en de coëfficiënt van r^3 is $\frac{1}{4} \cdot \binom{8}{3} = 14$ (want in $(r^2+1)^4$ en $(r^4+1)^2$ komen geen oneven machten van r voor), in totaal zijn er dus $2 \cdot (2 + 14) = 32$ kleuringen waarbij rood een oneven aantal keer gebruikt wordt.

Opgave 4. Zij G een graaf met n punten en $e(G)$ lijnen en zij $p(G,k)$ het kleurpolynoom van G.

(i) Laat zien dat $p(G,k)$ een veelterm van graad n is met kopcoëfficiënt 1 en constante term gelijk aan 0.

(ii) Laat zien dat de coëfficiënt van k^{n-1} in $p(G,k)$ gelijk is aan $-e(G)$.

(iii) Bewijs dat G een boom is dan en slechts dan als $p(G,k) = k(k-1)^{n-1}$.

Hint: Je mag natuurlijk gebruik maken van de recursie $p(G,k) = p(G-e,k) - p(G \cdot e,k)$. Hierbij is $G - e$ de graaf verkregen uit G door de lijn e te verwijderen en $G \cdot e$ de graaf verkregen door G langs e te contraheren (d.w.z. de eindpunten van e worden in een enkel punt samengetrokken).

Oplossing:

(i) We gebruiken inductie over $e(G)$. Voor $e(G) = 0$ is $p(G,k) = k^n$ en is de bewering waar. Voor $e(G) > 0$ gebruiken we de aangegeven recursie, volgens inductie zijn $p(G-e,k)$ en $p(G \cdot e,k)$ veeltermen van graad n en graad $n-1$ met kopcoëfficiënt 1 en constante term 0, daarom heeft ook $p(G,k) = p(G-e,k) - p(G \cdot e,k)$ kopcoëfficiënt 1 en constante term 0.

(ii) Ook dit laten we met inductie over $e(G)$ zien. Voor $e(G) = 0$ geldt weer $p(G,k) = k^n$, dus klopt de bewering in dit geval. Voor $e(G) > 0$ is volgens inductie $p(G-e,k) = k^n - (e(G)-1)k^{n-1} + \ldots$ en $p(G\cdot e,k) = k^{n-1} - \ldots$, dus is $p(G,k) = k^n - ((e(G)-1)k^{n-1} - k^{n-1} + \ldots$ (termen van graad $\leq n-2) = k^n - e(G)k^{n-1} + \ldots$.

(iii) $\Rightarrow$: We gebruiken inductie over n, voor $n = 1$ is de uitspraak zeker waar. Voor $n > 1$ gebruiken we de aangegeven recursie voor een lijn e die een punt van graad 1 bevat (dus een blad). Dan is $G \cdot e$ een boom met $n-1$ punten en $G - e$ is een boom met $n-1$ punten plus een los punt. Volgens inductie is dan $p(G-e,k) = k^2(k-1)^{n-2}$ en $p(G\cdot e,k) = k(k-1)^{n-2}$ en dus $p(G,k) = (k^2-k)(k-1)^{n-2} = k(k-1)^{n-1}$.

$\Leftarrow$: Volgens deel (i) is $p(G,k)$ een veelterm met constante term 0. Stel nu dat G een graaf met m samenhangscomponenten is, dan heeft iedere component een kleurpolynoom met constante term 0 en het kleurpolynoom van G is het product van de kleurpolynomen van de componenten. Dan is de laagste term in $p(G,k)$ minstens van graad m. Omdat de laagste term in $k(k-1)^{n-1}$ van graad 1 is, is G samenhangend.

Verder is $p(G,k)$ van de vorm $p(G,k) = k^n - (n-1)k^{n-1} + \ldots$, dus is $e(G) = n-1$ volgens deel (ii) en dus is G een boom.

Opgave 5.

(i) Zij C de lineaire binaire code met generatormatrix $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Laat zien dat dit een 1-foutverbeterende code is en geef alle codewoorden van gewicht 3 aan.

(b) Laat zien dat C geen perfecte code is, d.w.z. dat de bollen van straal 1 rond de codewoorden niet alle elementen van $\mathbb{F}_2^6$ overdekken.

(c) Geef een vector $v \in \mathbb{F}_2^6$ van gewicht 3 aan die niet op afstand 0 of 1 van een codewoord uit C ligt.

(ii) Bewijs: Er bestaat een Steiner tripel systeem $(v, 3, 1)$ dan en slechts dan als het mogelijk is de $v(v-1)/2$ lijnen van de volledige graaf K_v op v punten te partitioneren in lijndisjuncte deelgrafen die ieder een volledige graaf K_3 op 3 punten zijn.

Oplossing:

(i) (a) De sommen van twee van de rijen van G hebben gewicht 4 en de som van alle drie rijen is $(1,1,1,0,0,0)$ en heeft dus gewicht 3. Omdat alle niet-nul codewoorden gewicht ≥ 3 hebben is de code dus 1-foutverbeterend.

De codewoorden van gewicht 3 zijn de drie rijen van G en $(1,1,1,0,0,0)$.

(b) Iedere bol van straal 1 rond een codewoord bevat $6+1$ elementen, en omdat C dimensie 3 heeft, bevatten de bollen van straal 1 rond de codewoorden dus $8 \cdot 7 = 56$ vectoren uit $\mathbb{F}_2^6$. Maar $\mathbb{F}_2^6$ heeft 64 vectoren, dus liggen 8 vectoren uit $\mathbb{F}_2^6$ niet op afstand ≤ 1 van een codewoord.

(c) C bevat 4 codewoorden van gewicht 3 en 3 codewoorden van gewicht 4, die telkens afstand 1 hebben van 4 verschillende vectoren uit $\mathbb{F}_2^6$. In totaal zijn er $\binom{6}{3} = 20$ vectoren van gewicht 3 in $\mathbb{F}_2^6$, de resterende 4 vectoren die minstens afstand 2 van de codewoorden hebben, zijn $(0,0,0,1,1,1)$, $(1,1,0,0,0,1)$, $(1,0,1,0,1,0)$, $(0,1,1,1,0,0)$.

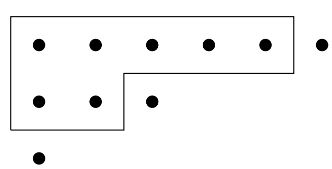
(ii) $\Rightarrow$: We verbinden de elementen van een blok door lijnen, dan levert iedere blok een deelgraaf van K_v van type K_3 op. Omdat ieder paar elementen in precies één blok ligt, komt iedere lijn van K_v in precies één van deze deelgrafen voor. De lijnen van de deelgrafen vormen dus een partitie van de lijnen van K_v.

$\Leftarrow$: We nemen de punten die bij één van de grafen van type K_3 behoren als blokken van een design. Dan heeft iedere blok 3 elementen en omdat de deelgrafen lijn-disjunct zijn, behoort iedere lijn bij precies één van de deelgrafen. Maar de lijnen zijn juist paren van punten, dus ligt ieder paar punten in precies één blok.

Opgave 6. Een partitie van een natuurlijk getal n noteren we met $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, waarbij we de conventie gebruiken dat $a_i \geq a_j$ voor $i < j$ (d.w.z. de delen van de partitie zijn aflopend). We definiëren op de verzameling van alle partities van natuurlijke getallen een partiële ordening $\preceq$ door

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \preceq b_1 + b_2 + \ldots + b_l \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} k \leq l \text{ en } a_i \leq b_i \text{ voor } i \leq k$$

Bijvoorbeeld is $5 + 2 \preceq 6 + 3 + 1$. Met behulp van Ferrers diagrammen laat zich dit als volgt visualiseren:



(i) Geef voor twee partities $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ en $y = b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ het infimum $x \wedge y$ en het supremum $x \vee y$ aan. Druk hierbij $x \wedge y$ en $x \vee y$ uit met behulp van de a_i en b_j.

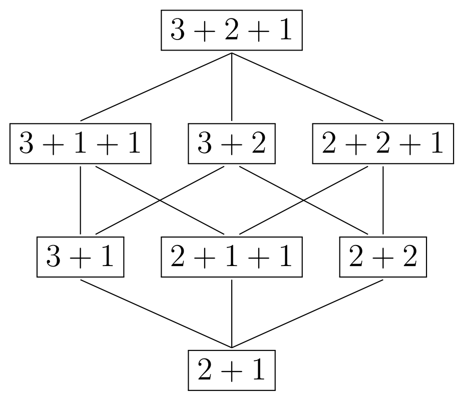
(ii) Zij $x = 2 + 1$ en $y = 3 + 2 + 1$. Geef het Hasse diagram aan van alle partities z met $x \preceq z \preceq y$ en bepaal de waarde $\mu(x, y)$ van de Möbius functie.

Oplossing:

(i) Zij $x \wedge y = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$. Wegens $(x \wedge y) \preceq x$ en $(x \wedge y) \preceq y$ volgt rechtstreeks dat $s \leq k$ en $s \leq l$ en dat $c_i \leq a_i$ en $c_i \leq b_i$ voor $i \leq s$. Omdat $x \wedge y$ de grootste ondergrens is, volgt hieruit $s = \min(k, l)$ en $c_i = \min(a_i, b_i)$ voor $i \leq s$.

Zij $x \vee y = d_1 + d_2 + \ldots + d_s$. Wegens $x \preceq (x \vee y)$ en $y \preceq (x \vee y)$ volgt rechtstreeks dat $k \leq s$ en $l \leq s$ en dat $a_i \leq d_i$ en $b_i \leq d_i$ voor $i \leq s$ (waarbij we $a_i = b_j = 0$ definiëren voor $i > k$ of $j > l$). Omdat $x \vee y$ de kleinste bovengrens is, volgt hieruit $s = \max(k, l)$ en $d_i = \max(a_i, b_i)$ voor $i \leq s$.

(ii) De partities z die in aanmerking komen zijn partities van de vorm $a_1 + a_2$ of $a_1 + a_2 + a_3$ met $2 \leq a_1 \leq 3$, $1 \leq a_2 \leq 2$ en $a_3 = 1$. De deeltralie van deze partities is in feite isomorf met $\mathbf{B}^3$, het Hasse diagram is



Voor de waarde van de Möbius functie kunnen we gebruik maken van het isomorfisme met $\mathbf{B}^3$, dit geeft rechtstreeks $\mu(x, y) = -1$. Maar we kunnen ook stapsgewijs nagaan dat $\mu(x, z) = -1$ voor $z \in \{3+1, 2+1+1, 2+2\}$ en vervolgens dat $\mu(x, z) = 1$ voor $z \in \{3+1+1, 3+2, 2+2+1\}$, dan volgt ook dat $\mu(x, y) = -1$.