Discrete Wiskunde (WB011C) **22 januari 2016**

Tentamen Discrete Wiskunde

- Schrijf op ieder ingeleverd blad duidelijk leesbaar je naam en studentnummer.
- De opgaven 1 t/m 6 tellen alle even zwaar.
- **Je hoeft slechts 5 van de 6 opgaven in te leveren! Als je alle opgaven maakt, telt de opgave met de minste punten niet mee.**

Opgave 1. We noteren met $P(n,k)$ het aantal partities van $n \in \mathbb{N}$ in k delen en met $P(n)$ het aantal partities van $n \in \mathbb{N}$ in een willekeurig aantal delen.

(i) Bewijs dat $P(n) = P(2n, n)$. Geef alle partities van 10 in 5 delen aan.

(ii) Zij $d \in \mathbb{N}$ vast gekozen. Bewijs dat de rij $\{P(n, n-d)\}_{n\in\mathbb{N},\, n\geq d}$ constant wordt. Wat is deze constante waarde en vanaf welke n neemt de rij deze waarde aan?

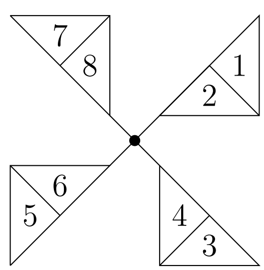
Opgave 2.

(i) Zij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de rij gegeven door $a_n = 2^n - 2$. Geef de OGF en de EGF van deze rij in gesloten vorm aan.

(ii) Leid een directe formule af voor de rij $\{b_n\}_{n\geq 0}$ gegeven door $b_0 = 2$ en $b_n = n\, b_{n-1} - n!$ voor $n \geq 1$.

Hint: Overweeg het gebruik van een EGF.

Opgave 3. We kleuren de acht vlakken van het hieronder afgebeelde windwiel. Twee kleuringen beschouwen we hierbij als equivalent als ze door een draaiing van het wiel in elkaar overgevoerd kunnen worden (de achterkant blijft gewoon grijs).



(i) Bepaal de cykel index van deze werking van de cyklische groep C_4.

(ii) Hoeveel inequivalente kleuringen met twee kleuren zijn er, en hoeveel met drie?

(iii) Stel je gebruikt de kleuren rood en geel. Hoeveel inequivalente kleuringen zijn er, waarbij je rood

(a) precies vier keer gebruikt;

(b) een oneven aantal keer gebruikt?

z.o.z. voor Opgaven 4 t/m 6

Opgave 4. Zij G een graaf met n punten en $e(G)$ lijnen en zij $p(G,k)$ het kleurpolynoom van G.

(i) Laat zien dat $p(G,k)$ een veelterm van graad n is met kopcoëfficiënt 1 en constante term gelijk aan 0.

(ii) Laat zien dat de coëfficiënt van k^{n-1} in $p(G,k)$ gelijk is aan $-e(G)$.

(iii) Bewijs dat G een boom is dan en slechts dan als $p(G,k) = k(k-1)^{n-1}$.

Hint: Je mag natuurlijk gebruik maken van de recursie $p(G,k) = p(G-e,k) - p(G \cdot e,k)$. Hierbij is $G-e$ de graaf verkregen uit G door de lijn e te verwijderen en $G \cdot e$ de graaf verkregen door G langs e te contraheren (d.w.z. de eindpunten van e worden in een enkel punt samengetrokken).

Opgave 5.

(i) Zij C de lineaire binaire code met generatormatrix $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Laat zien dat dit een 1-foutverbeterende code is en geef alle codewoorden van gewicht 3 aan.

(b) Laat zien dat C geen perfecte code is, d.w.z. dat de bollen van straal 1 rond de codewoorden niet alle elementen van $\mathbb{F}_2^6$ overdekken.

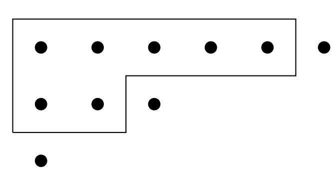
(c) Geef een vector $v \in \mathbb{F}_2^6$ van gewicht 3 aan die niet op afstand 0 of 1 van een codewoord uit C ligt.

(ii) Bewijs: Er bestaat een Steiner tripel systeem $(v,3,1)$ dan en slechts dan als het mogelijk is de $v(v-1)/2$ lijnen van de volledige graaf K_v op v punten te partitioneren in lijn-disjuncte deelgrafen die ieder een volledige graaf K_3 op 3 punten zijn.

Opgave 6. Een partitie van een natuurlijk getal n noteren we met $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, waarbij we de conventie gebruiken dat $a_i \geq a_j$ voor $i < j$ (d.w.z. de delen van de partitie zijn aflopend). We definiëren op de verzameling van alle partities van natuurlijke getallen een partiële ordening $\preceq$ door

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \preceq b_1 + b_2 + \ldots + b_l \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} k \leq l \text{ en } a_i \leq b_i \text{ voor } i \leq k$$

Bijvoorbeeld is $5 + 2 \preceq 6 + 3 + 1$. Met behulp van Ferrers diagrammen laat zich dit als volgt visualiseren:



(i) Geef voor twee partities $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ en $y = b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ het infimum $x \wedge y$ en het supremum $x \vee y$ aan. Druk hierbij $x \wedge y$ en $x \vee y$ uit met behulp van de a_i en b_j.

(ii) Zij $x = 2 + 1$ en $y = 3 + 2 + 1$. Geef het Hasse diagram aan van alle partities z met $x \preceq z \preceq y$ en bepaal de waarde $\mu(x,y)$ van de Möbius functie.

Succes ermee!