Discrete Wiskunde (WB011C) **januari 2016**

Proeftentamen Discrete Wiskunde

Opgave 1. Definieer $Q(n,k)$ als het aantal partities van het gehele getal n in k verschillende delen. Bijvoorbeeld is $Q(8,3) = 2$, de betreffende partities zijn $5+2+1$ en $4+3+1$.

(i) Leid een recursie af voor $Q(n,k)$, analoog met de recursie $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$ voor het aantal partities met mogelijk gelijke delen.

(ii) Laat zien dat voor het aantal $P(n,k)$ van partities van n in k (mogelijk gelijke) delen geldt dat $P(n,k) = Q\left(n + \binom{k}{2}, k\right)$.

Oplossing:

(i) We onderscheiden de gevallen of het kleinste deel van een partitie van n in k verschillende delen 1 of ≥ 2 is. In beide gevallen trekken we van ieder deel 1 af. In het eerste geval krijgen we zo een partitie van $n-k$ in $k-1$ verschillende delen, in het tweede geval een partitie van $n-k$ in k verschillende delen. Dit geeft $Q(n,k) = Q(n-k,k-1) + Q(n-k,k)$.

(ii) Van een partitie $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ met $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ kunnen we een partitie met verschillende delen maken door 1 bij a_2 op te tellen, 2 bij a_3, enz. Wegens $1+2+\ldots+(k-1) = \binom{k}{2}$ is $a_1 + (a_2+1) + \ldots + (a_k + k - 1)$ een partitie van $n + \binom{k}{2}$. Met de omgekeerde operatie komen we van een partitie van $n + \binom{k}{2}$ in verschillende delen terug naar een partitie van n met mogelijk gelijke delen.

Opgave 2. Zij $(a_k)_{k\geq 0}$ de rij met OGF $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

(i) Geef een expliciete formule voor a_k.

(ii) Geef een voorbeeld van een combinatorisch aftelprobleem dat voor $k \geq 0$ het antwoord a_k heeft.

Oplossing:

(i) We hebben $\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k$ en $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\geq 0} x^{2k}$. Volgens de convolutiestelling is de coëfficiënt van x^k in $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2}$ dan $\sum_{i=0, i \text{ even}}^{k} 1 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$.

(ii) Een voor de hand liggend probleem is het aantal partities van het getal k in delen van grootte 1 en 2.

Opgave 3. We kleuren de hoekpunten van een regelmatige zeshoek. Twee kleuringen beschouwen we hierbij als equivalent als ze door een draaiing van de zeshoek in elkaar overgevoerd kunnen worden (spiegelingen zijn niet toegestaan!).

(i) Bepaal de cykel index van deze werking van de cyklische groep C_6.

(ii) Hoeveel inequivalente kleuringen met vier kleuren zijn er?

(iii) Stel de vier kleuren zijn rood, geel, blauw en groen. Hoeveel inequivalente kleuringen zijn er, waarbij rood precies vier keer gebruikt wordt?

Oplossing:

(i) Zij g een voortbrenger van de cyklische groep, dan hebben g en g^5 cykelstructuur 6^1, g^2 en g^4 hebben cykelstructuur 3^2 en g^3 heeft cykelstructuur 2^3. Samen met 1^6 voor de identiteit geeft dit de cykel index $Z(z_1, \ldots, z_6) = \frac{1}{6}(z_1^6 + z_2^3 + 2z_3^2 + 2z_6)$.

(ii) Substitueren van het aantal kleuren in de cykel index geeft juist de CFB-stelling, het aantal kleuringen met 4 kleuren is dus $\frac{1}{6}(4^6 + 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4) = \frac{1}{6}(4096 + 64 + 32 + 8) = 700$.

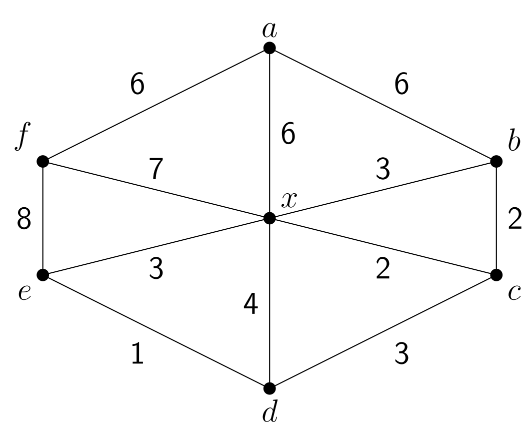
(iii) Hiervoor geven we de kleur rood het gewicht r en alle andere kleuren het gewicht 1. In de cykel index substitueren we nu z_i door $r^i + 1^i + 1^i + 1^i = r^i + 3$, dan is het gezochte aantal kleuringen de coëfficiënt van r^4: De substitutie geeft $\frac{1}{6}((r+3)^6 + (r^2+3)^3 + 2(r^3+3)^2 + 2(r^6+3))$ en de coëfficiënt van r^4 hierin is $\frac{1}{6}(\binom{6}{4} \cdot 3^2 + \binom{3}{2} \cdot 3) = \frac{1}{6}(15 \cdot 9 + 3 \cdot 3) = 24$.

Opgave 4.

(i) Voor een samenhangende gelabelde graaf G noteren we met $\tau(G)$ het aantal opspannende bomen van G. Verder is voor een lijn e de graaf $G - e$ de graaf met de lijn e verwijderd en de graaf $G \cdot e$ de graaf gecontraheerd langs e (dus de eindpunten van e zijn in een enkel punt samengetrokken).

Laat zien dat $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

(ii) Bepaal het gewicht van een minimale opspannende boom van de gewogen graaf hieronder.



Oplossing:

(i) Zij T een opspannende boom voor G, dan is $|T| = |G| = n$ en T heeft $n-1$ lijnen.

Als $e \notin T$, dan is T ook een opspannende boom voor $G - e$. Omgekeerd is iedere opspannende boom voor $G - e$ ook een opspannende boom voor G die e niet bevat.

Stel nu dat wel $e \in T$. Dan heeft $T \cdot e$ juist $n-1$ punten en $n-2$ lijnen en is samenhangend, want een pad in T die e niet bevat blijft ongedeerd en een pad die e wel bevat blijft ook in $T \cdot e$ een pad omdat de eindpunten van e samengetrokken worden. Dus is $T \cdot e$ een opspannende boom voor $G \cdot e$.

De afbeelding die T op $T \cdot e$ afbeeldt is injectief, want twee verschillende opspannende bomen T_1 en T_2 verschillen in minstens één lijn (anders dan e) en deze verschillende lijnen blijven in $T_1 \cdot e$ en $T_2 \cdot e$ bewaard. De afbeelding is ook surjectief, want opsplitsen van het samengetrokken punt en invoegen van de lijn e maakt van $T \cdot e$ weer een opspannende boom van G die e bevat en die juist op $T \cdot e$ wordt afgebeeld.

We hebben dus bijecties gevonden tussen de opspannende bomen van G die e niet bevatten en de opspannende bomen van $G - e$ en tussen de opspannende bomen van G die e wel bevatten en de opspannende bomen van $G \cdot e$.

(ii) De graaf heeft 7 punten, dus moeten we 6 lijnen vinden die geen cykel vormen en minimaal totaal gewicht hebben. Dit doen we met behulp van het algoritme van Kruskal.

We beginnen met de lijn van gewicht 1 en de twee lijnen van gewicht 2, vervolgens kunnen we nog één van de twee lijnen $e - x$ of $d - c$ van gewicht 3 toevoegen. De resterende lijnen van gewicht 3 en de lijn van gewicht 4 zouden nu een cykel opleveren, maar de lijnen $a - f$ en $a - b$ (of $a - x$) van gewicht 6 completeren een minimale opspannende boom. Deze heeft totaal gewicht $1 + 2 + 2 + 3 + 6 + 6 = 20$.

Opgave 5.

(i) Laat zien (bijvoorbeeld met een combinatorisch bewijs) dat voor ieder (b, v, r, k, λ)-design geldt dat $b = \dfrac{\lambda \cdot \binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$.

(ii) Ga na dat voor een $(b, v, r, 4, 1)$-design geldt dat $v \equiv 1$ of $4 \bmod 12$.

(iii) Het eenvoudigste niet-triviale $(b, v, r, 4, 1)$-design bestaat voor $v = 13$. Construeer zo'n design als cyklisch design modulo 13.

Oplossing:

(i) We tellen op twee manieren paren van elementen die in hetzelfde blok liggen. Aan de ene kant zijn er $\binom{v}{2}$ paren van elementen en ieder paar elementen komt in λ blokken voor. Aan de andere kant bevat ieder van de b blokken k elementen en dus $\binom{k}{2}$ paren van elementen. Hieruit volgt $b\binom{k}{2} = \lambda\binom{v}{2}$.

(ii) Volgens deel (i) is (met $k = 2$) $b = \binom{v}{2}/\binom{4}{2} = \frac{v(v-1)}{12}$ een geheel getal. Voor $0 \leq v \leq 11$ geldt $v(v-1) \equiv 0 \bmod 12$ alleen maar voor $v = 0, 1, 4, 9$. Maar ieder element ligt in r blokken en we weten dat $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ is. Dit moet ook een geheel getal zijn, dus moet in ons geval 3 een deler zijn van $v - 1$, d.w.z. $v \equiv 1 \bmod 3$. Hieruit volgt dat $v \equiv 1, 4 \bmod 12$.

(iii) We moeten alleen een basisblok aangegeven zo dat de verschillen van de geordende paren in het basisblok alle restklassen modulo 13 geven. Zo'n basisblok is bijvoorbeeld $\{0, 1, 4, 6\}$.

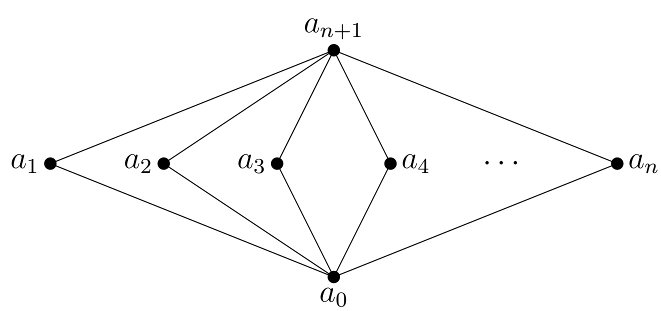
Opgave 6. Zij $\mathbf{P} = (X, \leq)$ een eindige partiële ordening. Met $x < y$ noteren we dat $x \leq y$ en $x \neq y$.

(i) Laat zien dat voor de Möbius functie μ op $\mathbf{P}$ geldt:

$$\mu(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, y)$$

waarbij c_i het aantal ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = y$ van lengte i tussen x en y is.

(ii) Bepaal de Möbius functie van de partiële ordening op $n + 2$ elementen met het volgende Hasse diagram



Een voorbeeld van dit Hasse diagram geven de lineaire deelruimten van $\mathbb{F}_p^2$, geordend met inclusie.

Oplossing:

(i) Dit bewijzen we met inductie over de lengte k van de langste keten tussen x en y. Voor $k = 0$ is $x = y$ en klopt de uitspraak.

Voor $k > 0$ is $x < y$ en geldt $\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$. Op z met $x \leq z < y$ kunnen we nu de inductieaanname toepassen:

$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = -\sum_{x \leq z < y} \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, z)$$

Verder is er een bijectie tussen de ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = z$ met $z < y$ en de ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < y$, want iedere keten van lengte $i + 1$ tussen x en y wordt op een unieke manier verkregen door een keten van lengte i tussen x en een z met $z < y$ te verlengen met de term "$< y$". Dit geeft

$$\mu(x, y) = -\sum_{i \geq 0} (-1)^i c_{i+1}(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^{i+1} c_{i+1}(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, y)$$

waarbij we voor de indexverschuiving in de laatste stap gebruiken dat $c_0(x, y) = 0$ voor $x < y$.

(ii) Het is duidelijk dat $\mu(a_i, a_i) = 1$ voor $0 \leq i \leq n + 1$ en $\mu(a_j, a_i) = 0$ voor $0 \leq i < j \leq n + 1$ en $\mu(a_i, a_j) = 0$ voor $1 \leq i < j \leq n$. Verder is $\mu(a_0, a_i) = -1$ voor $1 \leq i \leq n$, omdat in dit geval $a_0 < a_i$ de enige keten tussen a_0 en a_i is. Met hetzelfde argument is $\mu(a_i, a_{n+1}) = -1$ voor $1 \leq i \leq n$. Ten slotte is $\mu(a_0, a_{n+1}) = n - 1$, want er zijn n ketens van lengte 2 en 1 keten van lengte 1 tussen a_0 en a_{n+1}.