Proeftentamen Discrete Wiskunde

Opgave 1. Definieer $Q(n,k)$ als het aantal partities van het gehele getal n in k verschillende delen. Bijvoorbeeld is $Q(8,3) = 2$, de betreffende partities zijn $5+2+1$ en $4+3+1$.

(i) Leid een recursie af voor $Q(n,k)$, analoog met de recursie $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$ voor het aantal partities met mogelijk gelijke delen.

(ii) Laat zien dat voor het aantal $P(n,k)$ van partities van n in k (mogelijk gelijke) delen geldt dat $P(n,k) = Q\left(n + \binom{k}{2}, k\right)$.

Opgave 2. Zij $(a_k)_{k\geq 0}$ de rij met OGF $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

(i) Geef een expliciete formule voor a_k.

(ii) Geef een voorbeeld van een combinatorisch aftelprobleem dat voor $k \geq 0$ het antwoord a_k heeft.

Opgave 3. We kleuren de hoekpunten van een regelmatige zeshoek. Twee kleuringen beschouwen we hierbij als equivalent als ze door een draaiing van de zeshoek in elkaar overgevoerd kunnen worden (spiegelingen zijn niet toegestaan!).

(i) Bepaal de cykel index van deze werking van de cyklische groep C_6.

(ii) Hoeveel inequivalente kleuringen met vier kleuren zijn er?

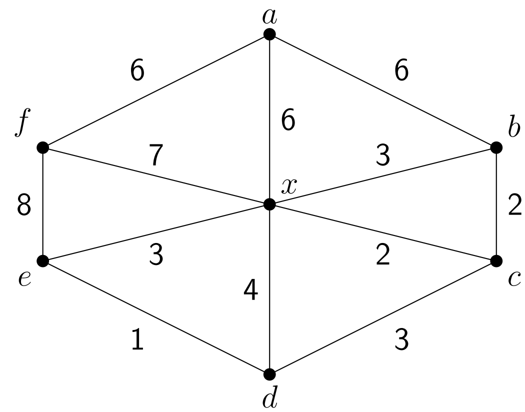
(iii) Stel de vier kleuren zijn rood, geel, blauw en groen. Hoeveel inequivalente kleuringen zijn er, waarbij rood precies vier keer gebruikt wordt?

Opgave 4.

(i) Voor een samenhangende gelabelde graaf G noteren we met $\tau(G)$ het aantal opspannende bomen van G. Verder is voor een lijn e de graaf $G - e$ de graaf met de lijn e verwijderd en de graaf $G \cdot e$ de graaf gecontraheerd langs e (dus de eindpunten van e zijn in een enkel punt samengetrokken).

Laat zien dat $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$.

(ii) Bepaal het gewicht van een minimale opspannende boom van de gewogen graaf hieronder.



Opgave 5.

(i) Laat zien (bijvoorbeeld met een combinatorisch bewijs) dat voor ieder (b, v, r, k, λ)-design geldt dat $b = \dfrac{\lambda \cdot \binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$.

(ii) Ga na dat voor een $(b, v, r, 4, 1)$-design geldt dat $v \equiv 1$ of $4 \bmod 12$.

(iii) Het eenvoudigste niet-triviale $(b, v, r, 4, 1)$-design bestaat voor $v = 13$. Construeer zo'n design als cyklisch design modulo 13.

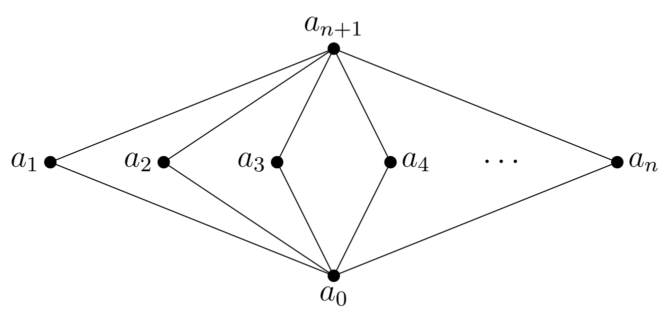
Opgave 6. Zij $\mathbf{P} = (X, \leq)$ een eindige partiële ordening. Met $x < y$ noteren we dat $x \leq y$ en $x \neq y$.

(i) Laat zien dat voor de Möbius functie μ op $\mathbf{P}$ geldt:

$$\mu(x, y) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(x, y)$$

waarbij c_i het aantal ketens $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = y$ van lengte i tussen x en y is.

(ii) Bepaal de Möbius functie van de partiële ordening op $n + 2$ elementen met het volgende Hasse diagram



Een voorbeeld van dit Hasse diagram geven de lineaire deelruimten van $\mathbb{F}_p^2$, geordend met inclusie.