Tentamen Discrete Wiskunde (kans B)

- Schrijf op ieder ingeleverd blad duidelijk leesbaar je naam en studentnummer.
- De opgaven 1 t/m 5 tellen alle even zwaar.

Opgave 1. Een *derangement* van n punten is een permutatie π van n punten, waarbij geen punt vast blijft. Het aantal derangements van n punten noteren we met d_n. Bijvoorbeeld is $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (alleen permutatie $(1,2)$) en $d_3 = 2$ (permutaties $(1,2,3)$ en $(1,3,2)$). We definiëren nog $d_0 = 1$.

(i) Laat zien dat de d_n voor $n \geq 2$ aan de recursie $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ voldoen.

(ii) Bewijs dat de d_n voor $n \geq 1$ ook aan de recursie $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ voldoen.

(iii) Bepaal de EGF van $\{d_n\}_{n\geq 0}$ (als concrete functie, niet alleen als machtreeks).

Oplossing:

(i) We schrijven een derangement π als product van disjuncte cykels, dan heeft π geen cykels van lengte 1. Nu conditioneren we (bijvoorbeeld) op het element n. Dit zit of in een 2-cykel of in een k-cykel met $k > 2$. In het eerste geval zijn er $n-1$ mogelijkheden voor de 2-cykel (i,n) en de resterende elementen vormen een derangement van $n-2$ punten. Er zijn dus $(n-1)d_{n-2}$ derangements waarbij n in een 2-cykel ligt. In het tweede geval kunnen we n uit de k-cykel verwijderen en houden we een derangement van $n-1$ punten over. Omdat we n achter ieder van de $n-1$ punten van een derangement op $\{1,\ldots,n-1\}$ in een cykel kunnen invoegen, zijn er $(n-1)d_{n-1}$ derangements waarbij n in een k-cykel met $k > 2$ ligt.

(ii) We gaan makkelijk na dat de recursies uit (i) en (ii) voor $n = 0,1,2$ dezelfde waarde opleveren. Verder kunnen we de recursie $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ voor $n \geq 2$ herschrijven tot

$$\begin{aligned} d_n &= nd_{n-1} + (-1)^n = (n-1)d_{n-1} + d_{n-1} + (-1)^n \\ &= (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \end{aligned}$$

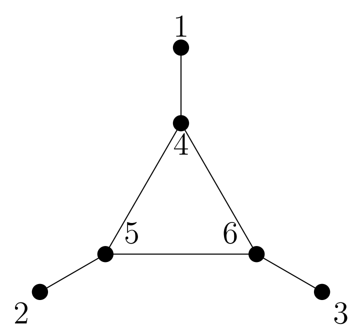
en dit is juist de recursie uit deel (i).

(iii) Zij $D(x)$ de EGF van $\{d_n\}_{n\geq 0}$. Volgens de recursie uit deel (ii) is

$$D(x)-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nd_{n-1}}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$$
$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=xD(x)+(e^{-x}-1)$$

Hieruit volgt $D(x)(1-x)=e^{-x}$, d.w.z. $D(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

Opgave 2. We kleuren de zes bollen van de hieronder afgebeelde structuur. Twee kleuringen beschouwen we hierbij als equivalent als ze door een ruimtelijke (!) draaiing van de structuur in elkaar overgevoerd kunnen worden (je mag dus bijvoorbeeld ook 180° draaien rond de as door bollen 1 en 4).



(i) Bepaal de cykel index van de werking van de symmetriegroep van de structuur op de zes bollen.

(ii) Hoeveel inequivalente kleuringen met twee kleuren zijn er, en hoeveel met drie?

(iii) Stel je gebruikt de kleuren blauw en paars. Hoeveel inequivalente kleuringen zijn er, waarbij je blauw precies drie keer gebruikt?

Oplossing:

(i) De symmetriegroep is de diëdergroep van orde 6 (isomorf met de symmetrische groep S_3). Deze bevat naast de identiteit twee rotaties van orde 3, namelijk $(1,2,3)(4,5,6)$ en $(1,3,2)(4,6,5)$, en drie spiegelingen van orde 2, namelijk $(2,3)(5,6)$, $(1,3)(4,6)$ en $(1,2)(4,5)$. Dit geeft de cykel index $Z(z_1,\ldots,z_3)=\frac{1}{6}(z_1^6+3z_1^2z_2^2+2z_3^2)$.

(ii) Substitueren van het aantal kleuren in de cykel index geeft juist de CFB-stelling, het aantal kleuringen met 2 kleuren is dus $\frac{1}{6}(2^6+3\cdot 2^4+2\cdot 2^2)=\frac{1}{6}(64+48+8)=20$, het aantal kleuringen met 3 kleuren is $\frac{1}{6}(3^6+3\cdot 3^4+2\cdot 3^2)=\frac{1}{6}(729+243+18)=165$,

(iii) Hiervoor geven we de kleur blauw het gewicht b en paars het gewicht 1. In de cykel index substitueren we nu z_i door $b^i + 1^i$, dit geeft $\frac{1}{6}((b+1)^6 + 3(b+1)^2(b^2+1)^2 + 2(b^3+1)^2)$. De coëfficiënt van b^3 geeft het aantal kleuringen aan waarbij blauw drie keer gebruikt wordt, dit is $\frac{1}{6}(\binom{6}{3} + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = \frac{1}{6}(20 + 12 + 4) = 6$.

Opgave 3. Voor een graaf G noteren we met $e(G)$ het aantal lijnen in G, met $\Delta(G)$ de maximale graad van een punt van G en met $\chi(G)$ het kleurgetal van G.

(i) Bewijs dat $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ en beschrijf een methode die altijd een geldige kleuring met $\Delta(G) + 1$ kleuren oplevert.

Geef ook een voorbeeld van een graaf met $\chi(G) > \Delta(G)$ en laat dus zien dat deze bovengrens voor $\chi(G)$ scherp is.

(ii) We nummeren de kleuren in een $\chi(G)$-kleuring gewoon $1, 2, \ldots, \chi(G)$. Laat zien dat er voor ieder paar kleuren (i, j) met $i \neq j$ een lijn e in de graaf bestaat zo dat de eindpunten van e kleuren i en j hebben.

Concludeer dat $\chi(G)(\chi(G) - 1) \leq 2 \cdot e(G)$.

(iii) Bepaal het kleurpolynoom $p(K_{2,n}, k)$ van de volledige bipartiete graaf $K_{2,n}$.

Herinnering: $K_{2,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ waarbij $|V_1| = 2$, $|V_2| = n$ en E bevat alle mogelijke lijnen met één eindpunt in V_1 en één eindpunt in V_2.

Oplossing:

(i) We kiezen een volgorde $v_1, v_2, \ldots, v_{n(G)}$ voor de punten van G en kleuren de punten in deze volgorde in. De kleuren nummeren we gewoon $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$. Voor v_j kiezen we de kleinste kleur die niet voor een buur v_i van v_j gebruikt is die al ingekleurd is (d.w.z. waarvoor $i < j$). Dit is altijd mogelijk omdat v_j hoogstens $\Delta(G)$ buren heeft en we $\Delta(G) + 1$ kleuren ter beschikking hebben.

In de volledige graaf K_n geldt $\chi(K_n) = n$ en $\Delta(K_n) = n - 1$. Alternatief is in een n-cykel C_n met n oneven $\Delta(C_n) = 2$ en $\chi(C_n) = 3$.

(ii) Neem aan dat er een paar kleuren (i, j) bestaat zo dat G geen lijn bevat waarvan de eindpunten kleuren i en j hebben. Dan kunnen we ieder punt die kleur j heeft in plaats daarvan kleur i geven zonder dat de kleuring ongeldig wordt. Immers, de kleuring zou alleen ongeldig worden als er op deze manier een lijn ontstaat die eindpunten van dezelfde kleur heeft. Maar omdat we kleur j door kleur i vervangen, zou dat alleen gebeuren als het tweede eindpunt kleur i heeft, en we hadden verondersteld dat zo'n lijn niet bestaat. De kleur j is dus niet nodig en we vinden een geldige kleuring met $\chi(G) - 1$ kleuren. Dit is een tegenspraak, we moeten dus inderdaad voor ieder paar kleuren een lijn met deze twee kleuren aan de eindpunten hebben.

Het aantal paren van kleuren is $\binom{\chi(G)}{2}$ en we hebben dus net bewezen dat $\binom{\chi(G)}{2} \leq e(G)$, d.w.z. $\chi(G)(\chi(G) - 1)/2 \leq e(G)$.

(iii) De twee punten in V_1 hebben óf dezelfde kleur óf verschillende kleuren. In het eerste geval zijn er k mogelijkheden voor de kleur van de twee punten in V_1 en dan zijn er $(k-1)^n$ mogelijkheden voor de punten van V_2. In het tweede geval zijn er $k(k-1)$ mogelijkheden voor de kleuring van V_1 en dan zijn er $(k-2)^n$ mogelijkheden voor de punten van V_2. In totaal geeft dit het kleurpolynoom $p(K_{2,n}, k) = k(k-1)(k-2)^n + k(k-1)^n$.

Opgave 4.

(i) Stel van een (b, v, r, k, λ)-design D zijn de parameters v, k, λ bekend. Geef formules aan die de resterende parameters b en r afhankelijk van v, k en λ uitdrukken.

(ii) Beschrijf alle mogelijke $(b, v, r, 2, 1)$-designs.

(iii) Zij $n \geq 3$. Geef aan hoe een $(n, n, n-1, n-1, n-2)$-design geconstrueerd kan worden.

(iv) Bewijs dat het complementaire design D^c van een (b, v, r, k, λ)-design D de parameters $(b, v, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$ heeft.

Concludeer dat voor een (b, v, r, k, λ)-design geldt dat $r \leq \dfrac{b+\lambda}{2}$.

Oplossing:

(i) Uit de formule $r(k-1) = \lambda(v-1)$ volgt rechtstreeks dat $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$. Hiermee volgt uit de formule $bk = vr$ dat $b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1}$.

(ii) Uit deel (i) volgt met $\lambda = 1$ en $k = 2$ dat $r = v-1$ en $b = \frac{v(v-1)}{2} = \binom{v}{2}$. Wegens $\lambda = 1$ moeten alle blokken verschillend zijn, wegens $r = v-1$ moet daarom ieder punt met ieder ander punt in een blok liggen. De blokken zijn dus noodzakelijk alle paren van punten.

(iii) De n blokken van zo'n design zijn de complementen van de n punten. Ieder van deze blokken heeft $n-1$ elementen en ieder punt ligt in $n-1$ blokken (namelijk alle behalve het blok waar die uit weggelaten is). Ieder paar punten ligt samen in $n-2$ blokken, namelijk alle blokken behalve de twee waaruit de twee punten weggelaten zijn.

(iv) Laten $(b', v', r', k', \lambda')$ de parameters van het complementaire design D^c zijn. Het is duidelijk dat het aantal punten en het aantal blokken ongewijzigd blijft, dus is $b' = b$ en $v' = v$. De complementen van blokken hebben $k' = v-k$ elementen en een punt ligt in D^c juist in de $b-r$ blokken waar die in D niet in lag, dus is $r' = b-r$. Laten i, j twee verschillende punten zijn, dan zijn er r blokken die i bevatten, r blokken die j bevatten en λ blokken die i en j bevatten. Volgens het inclusie-exclusie principe zijn er dus $2r-\lambda$ blokken die i of j bevatten en dus $b-2r+\lambda$ blokken die geen van i en j bevatten. In D^c liggen i, j dus samen in $\lambda' = b-2r+\lambda$ blokken.

Het aantal blokken van D^c waarin een paar punten ligt is $b-2r+\lambda \geq 0$ en hieruit volgt $b+\lambda \geq 2r$.

Opgave 5. Zij $\mathbf{P} = (X, \leq)$ een eindige partiële ordening die een kleinste element $\hat{0}$ en een grootste element $\hat{1}$ bevat (d.w.z. voor iedere $x \in X$ geldt $\hat{0} \leq x$ en $x \leq \hat{1}$). Stel dat $\mathbf{P}$ een verder element $\hat{y}$ bevat, ongelijk aan $\hat{0}$ en $\hat{1}$, dat met ieder element van X vergelijkbaar is (d.w.z. voor iedere $x \in X$ geldt $x \leq \hat{y}$ of $\hat{y} \leq x$).

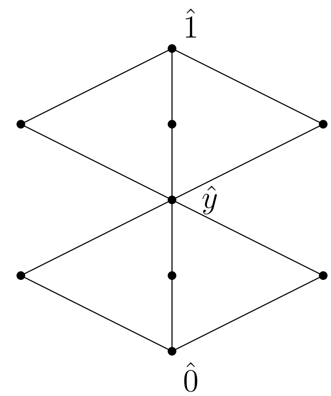
(i) Geef het Hasse diagram van een partiële ordening $\mathbf{P}$ met deze eigenschappen aan, die minstens 7 elementen bevat en geen totale ordening is.

(ii) Bewijs dat voor de Möbius functie μ op $\mathbf{P}$ geldt dat $\mu(\hat{0}, x) = 0$ voor iedere $x \in X$ met $x \neq \hat{y}$ en $\hat{y} \leq x$.

Hint: Laat dit eerst voor directe opvolgers x van $\hat{y}$ zien.

Oplossing:

(i) Een voorbeeld is de partiële ordening met Hasse diagram



(ii) We splitsen X op in de verzamelingen $X_{\leq} := \{x \in X \mid x \leq \hat{y}\}$ en $X_{>} := \{x \in X \mid x \neq \hat{y}, \hat{y} \leq x\}$, dan is X de disjuncte vereniging van $X_{\leq}$ en $X_{>}$ (dit volgt uit de gegeven eigenschap van $\hat{y}$). Wegens $\mu(\hat{0}, \hat{y}) = -\sum_{\hat{0} \leq x < \hat{y}} \mu(\hat{0}, x)$ en $\hat{0} \leq x$ voor alle $x \in X_{\leq}$ is

$$\sum_{x \in X_{\leq}} \mu(\hat{0}, x) = 0.$$

Omdat een partiële ordening transitief is, volgt voor $x \in X_{\leq}$ en $y \in X_{>}$ uit $x \leq \hat{y}$ en $\hat{y} \leq y$ dat $x \leq y$.

Voor een opvolger y van $\hat{y}$ is dan $\mu(\hat{0}, y) = -\sum_{\hat{0} \leq x < y} \mu(\hat{0}, x) = -\sum_{x \in X_{\leq}} \mu(\hat{0}, x) = 0.$

Noem voor $y \in X_{>}$ de lengte r van de kortste keten $\hat{y} \lessdot y_1 \lessdot \ldots \lessdot y_r = y$ met directe opvolgers de hoogte van y. Dan hebben we net aangetoond dat $\mu(\hat{0}, y) = 0$ voor opvolgers van hoogte 1. Hetzelfde argument laat nu zien dat ook voor opvolgers y van hoogte 2 geldt dat $\mu(\hat{0}, y) = 0$, want de opvolgers van hoogte 1 leveren alleen bijdragen van nul in de som $-\sum_{\hat{0} \leq x < y} \mu(\hat{0}, x)$. Met inductie is dus $\mu(\hat{0}, y) = 0$ voor opvolgers y van willekeurige hoogte en dus voor alle $y \in X_{>}$.