Discrete Wiskunde (WB011C) **2 mei 2016**

Tentamen Discrete Wiskunde (kans B)

- Schrijf op ieder ingeleverd blad duidelijk leesbaar je naam en studentnummer.
- De opgaven 1 t/m 5 tellen alle even zwaar.

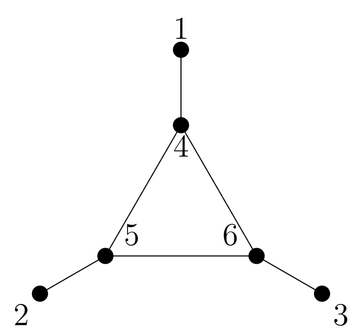
Opgave 1. Een *derangement* van n punten is een permutatie π van n punten, waarbij geen punt vast blijft. Het aantal derangements van n punten noteren we met d_n. Bijvoorbeeld is $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (alleen permutatie $(1, 2)$) en $d_3 = 2$ (permutaties $(1, 2, 3)$ en $(1, 3, 2)$). We definiëren nog $d_0 = 1$.

(i) Laat zien dat de d_n voor $n \geq 2$ aan de recursie $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ voldoen.

(ii) Bewijs dat de d_n voor $n \geq 1$ ook aan de recursie $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ voldoen.

(iii) Bepaal de EGF van $\{d_n\}_{n\geq 0}$ (als concrete functie, niet alleen als machtreeks).

Opgave 2. We kleuren de zes bollen van de hieronder afgebeelde structuur. Twee kleuringen beschouwen we hierbij als equivalent als ze door een ruimtelijke (!) draaiing van de structuur in elkaar overgevoerd kunnen worden (je mag dus bijvoorbeeld ook $180°$ draaien rond de as door bollen 1 en 4).



(i) Bepaal de cykel index van de werking van de symmetriegroep van de structuur op de zes bollen.

(ii) Hoeveel inequivalente kleuringen met twee kleuren zijn er, en hoeveel met drie?

(iii) Stel je gebruikt de kleuren blauw en paars. Hoeveel inequivalente kleuringen zijn er, waarbij je blauw precies drie keer gebruikt?

z.o.z. voor Opgaven 3 t/m 5

Opgave 3. Voor een graaf G noteren we met $e(G)$ het aantal lijnen in G, met $\Delta(G)$ de maximale graad van een punt van G en met $\chi(G)$ het kleurgetal van G.

(i) Bewijs dat $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ en beschrijf een methode die altijd een geldige kleuring met $\Delta(G) + 1$ kleuren oplevert.

Geef ook een voorbeeld van een graaf met $\chi(G) > \Delta(G)$ en laat dus zien dat deze bovengrens voor $\chi(G)$ scherp is.

(ii) We nummeren de kleuren in een $\chi(G)$-kleuring gewoon $1, 2, \ldots, \chi(G)$. Laat zien dat er voor ieder paar kleuren (i, j) met $i \neq j$ een lijn e in de graaf bestaat zo dat de eindpunten van e kleuren i en j hebben.

Concludeer dat $\chi(G)(\chi(G) - 1) \leq 2 \cdot e(G)$.

(iii) Bepaal het kleurpolynoom $p(K_{2,n}, k)$ van de volledige bipartiete graaf $K_{2,n}$.

Herinnering: $K_{2,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ waarbij $|V_1| = 2$, $|V_2| = n$ en E bevat alle mogelijke lijnen met één eindpunt in V_1 en één eindpunt in V_2.

Opgave 4.

(i) Stel van een (b, v, r, k, λ)-design D zijn de parameters v, k, λ bekend. Geef formules aan die de resterende parameters b en r afhankelijk van v, k en λ uitdrukken.

(ii) Beschrijf alle mogelijke $(b, v, r, 2, 1)$-designs.

(iii) Zij $n \geq 3$. Geef aan hoe een $(n, n, n-1, n-1, n-2)$-design geconstrueerd kan worden.

(iv) Bewijs dat het complementaire design D^c van een (b, v, r, k, λ)-design D de parameters $(b, v, b - r, v - k, b - 2r + \lambda)$ heeft.

Concludeer dat voor een (b, v, r, k, λ)-design geldt dat $r \leq \dfrac{b + \lambda}{2}$.

Opgave 5. Zij $\mathbf{P} = (X, \leq)$ een eindige partiële ordening die een kleinste element $\hat{0}$ en een grootste element $\hat{1}$ bevat (d.w.z. voor iedere $x \in X$ geldt $\hat{0} \leq x$ en $x \leq \hat{1}$). Stel dat $\mathbf{P}$ een verder element $\hat{y}$ bevat, ongelijk aan $\hat{0}$ en $\hat{1}$, dat met ieder element van X vergelijkbaar is (d.w.z. voor iedere $x \in X$ geldt $x \leq \hat{y}$ of $\hat{y} \leq x$).

(i) Geef het Hasse diagram van een partiële ordening $\mathbf{P}$ met deze eigenschappen aan, die minstens 7 elementen bevat en geen totale ordening is.

(ii) Bewijs dat voor de Möbius functie μ op $\mathbf{P}$ geldt dat $\mu(\hat{0}, x) = 0$ voor iedere $x \in X$ met $x \neq \hat{y}$ en $\hat{y} \leq x$.

Hint: Laat dit eerst voor directe opvolgers x van $\hat{y}$ zien.

Succes ermee!