Complexe Functies (NB019C) **28 juni 2017**

Tentamen Complexe Functies (kans A)

Opgave 1. *(6 punten)* Bereken de volgende contourintegralen:

(i) $\displaystyle\oint_{\partial D_1(0)} \frac{\sin(e^z)}{z}\, dz$ over de eenheidscirkel.

(ii) $\displaystyle\oint_{\partial D_2(0)} \frac{|z|\, e^z}{z^2}\, dz$ over de cirkel van straal 2 rond de oorsprong.

Oplossing:

(i) Omdat $\sin(e^z)$ holomorf is op $\mathbb{C}$ geldt volgens de Cauchy integraalstelling

$$\oint_{\partial D_1(0)} \frac{\sin(e^z)}{z}\, dz = 2\pi i\, \sin(e^0) = 2\pi i\, \sin(1) = 2\pi i\, \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = \pi(e^i - e^{-i}).$$

(ii) Merk op dat $g(z) = |z|$ niet holomorf is, daarom is ook $f(z) = \frac{|z|\, e^z}{z^2}$ niet holomorf op $C^\times$ en is de residuformule niet van toepassing. Maar wegens $|z| = 2$ op $\partial D_2(0)$ is $\displaystyle\oint_{\partial D_2(0)} \frac{|z|\, e^z}{z^2}\, dz = 2 \oint_{\partial D_2(0)} \frac{e^z}{z^2}\, dz$ en volgens de Cauchy integraalstelling voor afgeleiden is $\displaystyle\oint_{\partial D_2(0)} \frac{e^z}{z^2}\, dz = 2\pi i (e^z)'(0) = 2\pi i$, dus is $\displaystyle\oint_{\partial D_2(0)} \frac{|z|\, e^z}{z^2}\, dz = 4\pi i$.

Opgave 2. *(5 punten)*

(i) Zij $f(z)$ een op $\mathbb{C}$ holomorfe functie en definieer

$$g_1(z) := f(\overline{z}), \quad g_2(z) := \overline{f(z)}, \quad h(z) := \overline{f(\overline{z})}.$$

Laat zien dat $h(z)$ holomorf is op $\mathbb{C}$, maar dat $g_1(z)$ en $g_2(z)$ dit in het algemeen niet zijn.

Hint: Denk aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

(ii) Zij $f(z)$ holomorf op $\mathbb{C}$ en definieer $M_r := \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Leg uit waarom $M_{r_1} \leq M_{r_2}$ voor $r_1 < r_2$.

Oplossing:

(i) Met $f(z) = z = x + iy$ is $g_1(z) = g_2(z) = \overline{z} = x - iy$ en we weten al dat dit niet holomorf is, want het voldoet niet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen: $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial g_1}{\partial y}$.

Voor $h(z)$ schrijven we $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, dan is $h(z) = u(x,-y) - iv(x,-y)$ en we krijgen

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,-y) = u_x(x,-y) \underset{\text{Cauchy-Riemann}}{=} v_y(x,-y)$$
$$\underset{\text{kettingregel}}{=} \frac{\partial}{\partial y}(-v(x,-y)) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} h(z)$$

en analoog

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} h(z) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,-y) \underset{\text{kettingregel}}{=} -u_y(x,-y) \underset{\text{Cauchy-Riemann}}{=} v_x(x,-y)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}(-v(x,-y)) = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} h(z)$$

d.w.z. de partiële afgeleiden van $h(z)$ voldoen aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Omdat $f(z)$ holomorf is, zijn de partiële afgeleiden van $f(z)$ continu en daarom ook die van $h(z)$, dus is $h(z)$ inderdaad holomorf.

(ii) Stel $M_{r_2} < M_{r_1}$ voor $r_1 < r_2$. Dan heeft $f(z)$ in een inwendig punt van $D_{r_2}(0)$ een lokaal maximum en volgens het maximum principe is $f(z)$ dan constant, maar dan zou $M_{r_2} = M_{r_1}$ moeten gelden.

Alternatief: Volgens het maximum principe neemt $|f(z)|$ op een begrensd gebied zijn maxium op de rand aan, daarom is $M_{r_1} = \max_{|z|=r_1} |f(z)| \leq \max_{|z|\leq r_2} |f(z)| = \max_{|z|=r_2} |f(z)| = M_{r_2}$.

Opgave 3. *(6 punten)* De functie $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$ heeft simpele polen in $z_0 = 0$ en $z_1 = 1$.

(i) Bepaal de Laurent ontwikkeling van $f(z)$ in $z_0 = 0$ voor $0 < |z| < 1$.

(ii) Bepaal de Laurent ontwikkeling van $f(z)$ in $z_0 = 0$ voor $|z| > 1$.

(iii) Bepaal de Taylorreeks van $f(z)$ in $z_2 = -1$ en geef de convergentiestraal van deze Taylorreeks aan.

Hint: Ga na dat $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z} = -\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{1-z}$.

Oplossing:

(i) Voor $|z| < 1$ hebben we

$$f(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots$$

(ii) Voor $|z| > 1$ is

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \ldots$$

(iii) Op eenzelfde noemer brengen geeft $-\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = \frac{-(1-z)-z}{z(1-z)} = \frac{-1}{z-z^2} = \frac{1}{z^2-z}$.

Herschrijven van de breuken naar (meetkundige) reeksen in $z+1$ geeft

$$-\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n \quad \text{en}$$

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{2-(z+1)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

en dus

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})(z+1)^n.$$

Alternatief laten zich de coëfficiënten van de Taylorreeks ook via de afgeleiden bepalen:

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{z}\right)^{(n)} = \frac{1}{n!}(-1)^n n!\frac{-1}{z^{n+1}} \underset{z=-1}{\longrightarrow} (-1)^n\frac{-1}{(-1)^{n+1}} = 1$$

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{(n)} = \frac{1}{n!}(-1)^n n!\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \underset{z=-1}{\longrightarrow} (-1)^n\frac{1}{(-2)^{n+1}} = -\frac{1}{2^{n+1}}$$

De convergentiestraal is $R = 1$, dit is de afstand van $z_2 = -1$ van de singulariteit in $z_0 = 0$. Natuurlijk volgt dit ook uit het feit dat $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{2^{n+1}}} = 1$ is.

Opgave 4. *(5 punten)* Zij $f(z) = \tan(\pi z)$.

(i) Bepaal de singulariteiten van $f(z)$ op $\mathbb{C}$ en geef het type van de singulariteiten aan.

(ii) Bereken de contourintegraal $\oint_{\partial D_m(0)} \tan(\pi z)\,dz$, waarbij $m \geq 1$ een geheel getal is.

Oplossing:

(i) Uit $\tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ volgt dat $f(z)$ singulariteiten heeft in de nulpunten van $\cos(\pi z)$ en dit zijn de waarden $N + \frac{1}{2}$ voor $N \in \mathbb{Z}$. In een nulpunt z_0 heeft $\cos(\pi z)$ de onwikkeling $\cos(\pi z) = -\pi\sin(\pi z_0)(z - z_0) + \ldots$ en omdat $\cos$ en $\sin$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben, is z_0 dan een simpel nulpunt. De singulariteiten $N + \frac{1}{2}$ van $f(z)$ zijn dus alle simpele polen.

(ii) Wegens $\cos(\pi z) = -\pi \sin(\pi z_0)(z - z_0) + \ldots$ in een nulpunt z_0 van $\cos(\pi z)$ is $\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \dfrac{\sin(\pi z_0)}{-\pi \sin(\pi z_0)} = -\frac{1}{\pi}$. Binnen de cirkel $D_m(0)$ van straal m liggen $2m$ nulpunten van $\cos(\pi z)$, dus is volgens de residuformule $\displaystyle\oint_{\partial D_m(0)} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot 2m \cdot (-\frac{1}{\pi}) = -4mi$.

Opgave 5. *(5 punten)* Bewijs dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

Oplossing: We herschrijven de functie in $z = e^{i\theta}$, dan is

$$(1 + 2\cos\theta)^n \cos(n\theta) = \left(1 + 2\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n \frac{e^{i\theta n} + e^{-i\theta n}}{2} = \frac{1}{2}(1 + z + z^{-1})^n (z^n + z^{-n}).$$

Uit $dz = ie^{i\theta} d\theta$ volgt $d\theta = \frac{dz}{iz}$ en hiermee vinden we

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta = \oint_{\partial D_1(0)} \frac{1}{2iz}(1 + z + z^{-1})^n (z^n + z^{-n})\, dz.$$

Bekijk dus de functie $f(z) = \frac{1}{2iz}(1 + z + z^{-1})^n (z^n + z^{-n})$, deze heeft als enige singulariteit (binnen de eenheidscirkel) $z_0 = 0$. Wegens de term $\frac{1}{iz}$ hebben we voor het residu in $z_0 = 0$ de constante coëfficiënt in $(1 + z + z^{-1})^n (z^n + z^{-n}) = (z^2 + z + 1)^n (1 + z^{-2n})$ nodig, en deze is 2 (we moeten z^{-2n} in de tweede factor met de hoogste term z^{2n} uit de eerste factor combineren, en 1 uit de tweede factor met 1 uit de eerste factor), dus is $\mathrm{res}_0 f(z) = \frac{1}{2i} \cdot 2 = -i$ en volgens de residuformule is dan $\displaystyle\oint_{\partial D_1(0)} f(z)\, dz = 2\pi i(-i) = 2\pi$.