Complexe Functies (NB019C) **28 juni 2017**

Tentamen Complexe Functies (kans A)

Opgave 1. *(6 punten)* Bereken de volgende contourintegralen:

(i) $\displaystyle\oint_{\partial D_1(0)} \frac{\sin(e^z)}{z}\, dz$ over de eenheidscirkel.

(ii) $\displaystyle\oint_{\partial D_2(0)} \frac{|z|\, e^z}{z^2}\, dz$ over de cirkel van straal 2 rond de oorsprong.

Opgave 2. *(5 punten)*

(i) Zij $f(z)$ een op $\mathbb{C}$ holomorfe functie en definieer

$$g_1(z) := f(\overline{z}), \quad g_2(z) := \overline{f(z)}, \quad h(z) := \overline{f(\overline{z})}.$$

Laat zien dat $h(z)$ holomorf is op $\mathbb{C}$, maar dat $g_1(z)$ en $g_2(z)$ dit in het algemeen niet zijn.

Hint: Denk aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

(ii) Zij $f(z)$ holomorf op $\mathbb{C}$ en definieer $M_r := \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Leg uit waarom $M_{r_1} \leq M_{r_2}$ voor $r_1 < r_2$.

Opgave 3. *(6 punten)* De functie $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$ heeft simpele polen in $z_0 = 0$ en $z_1 = 1$.

(i) Bepaal de Laurent ontwikkeling van $f(z)$ in $z_0 = 0$ voor $0 < |z| < 1$.

(ii) Bepaal de Laurent ontwikkeling van $f(z)$ in $z_0 = 0$ voor $|z| > 1$.

(iii) Bepaal de Taylorreeks van $f(z)$ in $z_2 = -1$ en geef de convergentiestraal van deze Taylorreeks aan.

Hint: Ga na dat $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z} = -\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{1-z}$.

Opgave 4. *(5 punten)* Zij $f(z) = \tan(\pi z)$.

(i) Bepaal de singulariteiten van $f(z)$ op $\mathbb{C}$ en geef het type van de singulariteiten aan.

(ii) Bereken de contourintegraal $\displaystyle\oint_{\partial D_m(0)} \tan(\pi z)\, dz$, waarbij $m \geq 1$ een geheel getal is.

Opgave 5. *(5 punten)* Bewijs dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta)^n \cos(n\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

Succes ermee!