Tentamen Complexe Functies (kans A)

Opgave 1. *(5 punten)* Zij $f(z) = \dfrac{1}{4+z^2}$.

(i) Geef het grootste gebied $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aan zo dat $f(z)$ holomorf is op Ω.

Geef ook de afgeleide $f'(z)$ van $f(z)$ op Ω aan.

(ii) Bepaal de geïsoleerde singulariteiten van $f(z)$ een geef het type van deze singulariteiten aan (ophefbaar, pool, essentieel).

Geef ook het type van de singulariteit bij oneindig aan.

(iii) Wat is de convergentiestraal van de Taylor reeks van $f(z)$ rond $z_0 = 0$?

Oplossing:

(i) De constante functie $g(z) = 1$ en de veeltermfunctie $h(z) = 4 + z^2$ zijn op $\mathbb{C}$ holomorf, daarom is $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ holomorf als $h(z) \neq 0$, d.w.z. als $z \neq \pm 2i$. De functie is dus holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$ (dit is open en samenhangend en dus een gebied).

De afgeleide is $f'(z) = \dfrac{-2z}{(4+z^2)^2}$.

(ii) Uit $f(z) = \dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}$ volgt rechtstreeks dat $2i$ en $-2i$ simpele polen zijn.

Om het gedrag bij oneindig te onderzoeken, bekijken we voor $w = \frac{1}{z}$ de functie $g(w) = f(\frac{1}{w})$ rond $w_0 = 0$. Er geldt $g(w) = f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{4+\frac{1}{w^2}} = \frac{w^2}{4w^2+1} = w^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-4w^2)^n$. Voor $w_0 = 0$ heeft $g(w)$ een ophefbare singulariteit die met $g(0) = 0$ holomorf opgeheven kan worden, d.w.z. $f(z)$ heeft bij oneindig een ophefbare singulariteit.

Dit is natuurlijk ook rechtstreeks af te leiden uit het feit dat $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ onafhankelijk van het pad waarop z naar oneindig gaat.

(iii) De punten $z = \pm 2i$ waar de functie niet holomorf is, hebben afstand 2 van $z_0 = 0$, daarom is de convergentiestraal 2 .

Opgave 2. *(5 punten)* Zij $R > 0$ en zij $f(z)$ een holomorfe functie op de cirkelschijf $D_R(0)$. Stel dat $f(z)$ voor z_0 met $|z_0| < R$ een simpel nulpunt heeft (d.w.z. $f(z_0) = 0$ maar $f'(z_0) \neq 0$) en dat dit het enige nulpunt van $f(z)$ is met $|z_0| < R$.

Laat zien dat

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_r(0)} \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < r < |z_0|; \\ z_0 & \text{als } |z_0| < r < R. \end{cases}$$

Oplossing: Voor $r < |z_0|$ is $\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}$ holomorf op een cirkelschijf van straal r' met $r < r' < |z_0|$ en dus is in dit geval $\displaystyle\oint_{\partial D_r(0)} \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ volgens de Cauchy integraalstelling.

Omdat z_0 het enige nulpunt van $f(z)$ in $D_R(0)$ is en z_0 een simpel nulpunt is, geldt $f(z) = (z - z_0)g(z)$ voor $g(z)$ een op $D_R(0)$ holomorfe functie met $g(z) \neq 0$ op $D_R(0)$.

Nu is $f'(z) = ((z - z_0)g(z))' = (z - z_0)g'(z) + g(z)$ en dus $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = \dfrac{zg'(z)}{g(z)} + \dfrac{z}{z - z_0}$. De functie $\dfrac{zg'(z)}{g(z)}$ is holomorf op $D_R(0)$, dus is $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_r(0)} \frac{z\,g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$ (volgens de Cauchy integraalstelling) en daarom is voor $|z_0| < r < R$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_r(0)} \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_r(0)} \frac{z}{z - z_0}\,dz = z_0$$

volgens de Cauchy integraalformule.

Opgave 3. *(5 punten)* Zij $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z^3}$.

(i) Bepaal de Laurent reeksen van $f(z)$ rond $z_0 = 0$ voor $0 < |z| < 1$ en voor $|z| > 1$.

(ii) Bepaal de residuën van $f(z)$ in $z_0 = 0$ en in $z_1 = -1$.

Oplossing:

(i) Voor $|z| < 1$ herschrijven we

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Voor $|z| > 1$ is $|\frac{1}{z}| < 1$ en we herschrijven

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \ldots = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^n}.$$

(ii) In deel (i) hebben we gezien dat $\mathrm{res}_0\, f(z) = -1$. Voor het residu in $z_1 = -1$ merken we op dat z_1 een simpele pool is en schrijven $f(z) = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{z^2}$, dan is $\mathrm{res}_{-1}\, f(z) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$.

Opgave 4. *(5 punten)* Zij $f(z) = e^{z^2}$.
Bepaal de punten op de eenheidsschijf $\overline{D}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ waar $|f(z)|$ zijn maximale en zijn minimale waarde aanneemt en geef de maximale en de minimale waarden aan.

Oplossing: Omdat $f(z)$ holomorf op $\mathbb{C}$ is, $f(z) \neq 0$ voor $z \in \mathbb{C}$ en de eenheidsschijf een begrensd gebied is, neemt $|f(z)|$ volgens het maximum- en het minimumprincipe zijn maxima en minima op de rand van de eenheidsschijf aan, dus voor $|z| = 1$.
Voor $|z| = 1$ schrijven we $z = e^{i\theta}$, dan is $z^2 = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ en hiermee

$$e^{z^2} = e^{\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)} = e^{\cos(2\theta)} \cdot e^{i\sin(2\theta)} \text{ en dus } |e^{z^2}| = e^{\cos(2\theta)}.$$

Omdat de exponentiële functie monotoon stijgend is, is $|e^{z^2}|$ maximaal/minimaal dan en slechts dan als $\cos(2\theta)$ maximaal/minimaal is.
Voor $g(\theta) = \cos(2\theta)$ is $g'(\theta) = -2\cos(2\theta)$ en we vinden kritische punten voor $\cos(2\theta) = 0$, d.w.z. voor $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. De randpunten $\theta = 0$ en $\theta = 2\pi$ hoeven we niet apart te onderzoeken, omdat $g(\theta)$ een 2π-periodieke functie is.
We zien dus dat $g(\theta)$ maxima $g(\theta) = 1$ heeft voor $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ en $g(\theta)$ heeft minima $g(\theta) = -1$ voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
Voor de gegeven functie $f(z)$ betekent dit dat $|f(z)|$ de maximale waarde $|f(z)| = e$ aanneemt in $z = 1$ en $z = -1$ en de minimale waarde $|f(z)| = \frac{1}{e}$ in $z = i$ en $z = -i$.

Opgave 5. *(5 punten)* Laat voor $a > 0$ zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e^a}.$$

Oplossing: Beschouw de functie $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{1+z^2}$, dan is $\dfrac{\cos(ax)}{1+x^2} = \mathrm{Re}(f(x))$ voor $x \in \mathbb{R}$. Als contour γ nemen we de bovenhalfcirkel van straal R en we merken op dat $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)}$, dan is duidelijk dat de polen $z = \pm i$ van $f(z)$ simpel zijn en dat alleen $z_0 = i$ binnen het contour γ ligt. Het residu in $z = i$ is $\mathrm{res}_i\, f(z) = \frac{e^{-a}}{2i}$. Volgens de residuformule is dan

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \frac{\pi}{e^a}.$$

Nu is $f(z) = e^{iaz} g(z)$ met $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en $a > 0$, en wegens $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$ volgt uit het Lemma van Jordan dat voor de integraal over de cirkelboog van straal R geldt dat $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R,\, \mathrm{Im}(z)\geq 0} f(z)\, dz = 0$.
We hebben dus $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \oint_\gamma f(z)\, dz = \frac{\pi}{e^a}$ en hieruit volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{e^a}\right) = \frac{\pi}{e^a}.$$