Complexe Functies (NB019C) **27 juni 2016**

Tentamen Complexe Functies (kans A)

Opgave 1. *(5 punten)* Zij $f(z) = \dfrac{1}{4+z^2}$.

(i) Geef het grootste gebied $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aan zo dat $f(z)$ holomorf is op Ω.

Geef ook de afgeleide $f'(z)$ van $f(z)$ op Ω aan.

(ii) Bepaal de geïsoleerde singulariteiten van $f(z)$ een geef het type van deze singulariteiten aan (ophefbaar, pool, essentieel).

Geef ook het type van de singulariteit bij oneindig aan.

(iii) Wat is de convergentiestraal van de Taylor reeks van $f(z)$ rond $z_0 = 0$?

Opgave 2. *(5 punten)* Zij $R > 0$ en zij $f(z)$ een holomorfe functie op de cirkelschijf $D_R(0)$. Stel dat $f(z)$ voor z_0 met $|z_0| < R$ een simpel nulpunt heeft (d.w.z. $f(z_0) = 0$ maar $f'(z_0) \neq 0$) en dat dit het enige nulpunt van $f(z)$ is met $|z_0| < R$.

Laat zien dat

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_r(0)} \frac{z\, f'(z)}{f(z)}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < r < |z_0|; \\ z_0 & \text{als } |z_0| < r < R. \end{cases}$$

Opgave 3. *(5 punten)* Zij $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z^3}$.

(i) Bepaal de Laurent reeksen van $f(z)$ rond $z_0 = 0$ voor $0 < |z| < 1$ en voor $|z| > 1$.

(ii) Bepaal de residuën van $f(z)$ in $z_0 = 0$ en in $z_1 = -1$.

Opgave 4. *(5 punten)* Zij $f(z) = e^{z^2}$.

Bepaal de punten op de eenheidsschijf $\overline{D}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ waar $|f(z)|$ zijn maximale en zijn minimale waarde aanneemt en geef de maximale en de minimale waarden aan.

Opgave 5. *(5 punten)* Laat voor $a > 0$ zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e^a}.$$

Succes ermee!