Tentamen Complexe Functies (kans B)

Opgave 1. *(6 punten)* Bepaal voor ieder van de volgende machtreeksen de convergentiestraal.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(\ln n)^n}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n - 1}\, z^n$;

(iii) $\displaystyle 1 + 7z + 5^2z^2 + 7^3z^3 + 5^4z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 5^{2n}z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 7^{2n+1}z^{2n+1}$.

Oplossing:

(i) Voor $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$ is $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n}$. Er geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, dus is de convergentiestraal oneindig.

(ii) Voor $a_n = \frac{n}{3^n-1}$ hebben we $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}-1} \cdot \frac{3^n-1}{n} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{3-\frac{1}{3^n}}(1+\frac{1}{n})$ en dus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$, dus is de convergentiestraal gelijk aan 3.

(iii) Voor even n is $a_n = 5^n$ en voor oneven n is $a_n = 7^n$, daarom is $\sqrt[n]{a_n} = 5$ voor even n en $\sqrt[n]{a_n} = 7$ voor oneven n. We hebben dus $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 7$ en dus is de convergentiestraal $\dfrac{1}{7}$.

Opgave 2. *(5 punten)* Zij $f(z) = \dfrac{e^{3z}}{z - \pi i}$.

(i) Bepaal $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz$ voor γ de cirkel gegeven door $|z-1| = 4$;

(ii) Bepaal $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz$ voor γ de ellips gegeven door $|z-2| + |z+2| = 6$.

Oplossing:

(i) De functie $g(z) = e^{3z}$ is holomorf op $\mathbb{C}$ en het punt $z_0 = \pi i$ ligt binnen de cirkel γ omdat $|\pi i - 1|^2 = \pi^2 + 1 < 16$. Volgens de Cauchy integraalformule is dan $\displaystyle\oint_\gamma \frac{g(z)}{z - \pi i}\,dz = 2\pi i \cdot g(\pi i) = 2\pi i \cdot e^{3\pi i} = -2\pi i$.

(ii) In dit geval lig $z_0 = \pi i$ niet binnen de ellips γ, want $|\pi i \pm 2| = \sqrt{\pi^2 + 4} > \pi > 3$, dus is $|\pi i - 2| + |\pi i + 2| > 6$. Volgens de Cauchy integraalstelling is dan $\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Opgave 3. *(7 punten)* Zij $f(z) = e^{z/(z-2)}$.

(i) Bepaal de Laurent reeks van $f(z)$ rond $z_0 = 2$ en geef het gebied aan waarop deze Laurent reeks convergeert.

(ii) Bepaal de residuën van $f(z)$ in $z_0 = 2$ en in $z_1 = 0$.

(iii) Geef het type van de singulariteiten van $f(z)$ aan in $z_0 = 2$ en $z_2 = \infty$.

Oplossing:

(i) Merk op dat $\frac{z}{z-2} = \frac{(z-2)+2}{z-2} = 1 + \frac{2}{z-2}$. Hieruit volgt $f(z) = e^{1+\frac{2}{z-2}} = e \cdot e^{\frac{2}{z-2}}$ en de Taylor reeks van de exponentiële functie geeft

$$f(z) = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right) (z-2)^{-n}.$$

Omdat de Taylor reeks van de exponentiële functie convergentiestraal ∞ heeft, convergeert deze Taylor reeks voor alle $z \neq 2$.

(ii) Uit deel (i) volgt dat $\mathrm{res}_{z_0=2}\, f(z) = 2e$ is.

In $z_1 = 0$ is $f(z)$ gewoon holomorf, daarom is hier het residu gelijk aan nul.

(iii) Omdat de Laurent reeks rond $z_0 = 2$ oneindig veel negatieve machten van $(z-2)$ bevat, is $z_0 = 2$ een essentiële singulariteit.

Voor het type van de singulariteit bij $z_2 = \infty$ bekijken we voor $w = \frac{1}{z}$ de functie $g(w) = f(\frac{1}{w})$ rond $w_0 = 0$. We hebben $\frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w} - 2} = \frac{1}{1-2w}$, dus is $g(w) = e^{\frac{1}{1-2w}}$ en dit is in $w_0 = 0$ gewoon holomorf, dus is dit een ophefbare singulariteit.

Opgave 4. *(4 punten)*

(i) Zij $f(z)$ een op $\mathbb{C}$ holomorfe functie. Stel dat $|f(z)| \geq 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Laat zien dat $f(z)$ een constante functie is.

(ii) Zij $r > 0$ en zij Ω een gebied met $\overline{D}_r(0) \subseteq \Omega$. Laten $g(z)$ en $h(z)$ op Ω holomorfe functies zijn en stel dat $g(z) = h(z)$ voor $|z| = r$.

Laat zien dat $g(z) = h(z)$ voor alle $z \in \overline{D}_r(0)$.

Oplossing:

(i) Omdat $|f(z)| \geq 1$ volgt i.h.b. dat $f(z) \neq 0$, dus is ook $\dfrac{1}{f(z)}$ een op $\mathbb{C}$ holomorfe functie. Maar $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right| \leq 1$, dus is $\dfrac{1}{f(z)}$ begrensd en daarom constant (volgens de stelling van Liouville). Maar dan is ook $f(z)$ constant.

(ii) De functie $f(z) = g(z) - h(z)$ is holomorf op Ω en $f(z) = 0$ voor $|z| = r$. Volgens het maximumprincipe neemt $|f(z)|$ zijn maximum op $\overline{D}_r(0)$ op de rand van $\overline{D}_r(0)$ aan, dus voor $|z| = r$. Maar daar is $|f(z)| = 0$, dus is $|f(z)| = 0$ voor alle $z \in \overline{D}_r(0)$ en dus $g(z) = h(z)$ voor alle $z \in \overline{D}_r(0)$.

Alternatief volgt dit ook uit de Cauchy integraalformule, want voor $z \in D_r(0)$ geldt $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_r(0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_r(0)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = h(z)$ omdat $g(\zeta) = h(\zeta)$ op $\partial D_r(0)$. Omdat $g(z) = h(z)$ op $D_r(0)$ en op $\partial D_r(0)$ is dus $g(z) = h(z)$ op $\overline{D}_r(0)$.

Opgave 5. *(5 punten)* Bepaal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 10}\, dx.$$

Oplossing: Beschouw de functie $f(z) = \dfrac{z\, e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 10}$, dan is $\dfrac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 10} = \mathrm{Im}(f(x))$ voor $x \in \mathbb{R}$.

Als contour γ nemen we de bovenhalfcirkel van straal R en we merken op dat $z^2 + 2z + 10 = (z+1)^2 + 9 = (z+1+3i)(z+1-3i)$. Dit maakt duidelijk dat $f(z) = \dfrac{z\, e^{i\pi z}}{(z+1+3i)(z+1-3i)}$ simpele polen in $z = -1 \pm 3i$ heeft, maar alleen $z_0 = -1 + 3i$ ligt binnen het contour γ.

Het residu in $z_0 = -1 + 3i$ is $\mathrm{res}_{z_0 = -1+3i} f(z) = \frac{(-1+3i)e^{(-i-3)\pi}}{6i} = \frac{(1-3i)e^{-3\pi}}{6i}$. Volgens de residuformule is dan

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \frac{(1-3i)e^{-3\pi}}{6i} = \frac{(\pi - 3\pi i)e^{-3\pi}}{3}.$$

Nu is $f(z) = e^{i\pi z} g(z)$ met $g(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2z + 10}$, en wegens $\lim_{|z| \to \infty} |g(z)| = 0$ volgt uit het Lemma van Jordan dat voor de integraal over de cirkelboog van straal R geldt dat $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{|z|=R,\, \mathrm{Im}(z) \geq 0} f(z)\, dz = 0$.

We hebben dus $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \oint_\gamma f(z)\, dz = \frac{(\pi - 3\pi i)e^{-3\pi}}{3}$ en hieruit volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 10}\, dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(\pi - 3\pi i)e^{-3\pi}}{3}\right) = -\pi e^{-3\pi}.$$