Tentamen Complexe Functies (kans B)

Opgave 1. *(6 punten)* Bepaal voor ieder van de volgende machtreeksen de convergentiestraal.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(\ln n)^n}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n - 1}\, z^n$;

(iii) $\displaystyle 1 + 7z + 5^2z^2 + 7^3z^3 + 5^4z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 5^{2n}z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 7^{2n+1}z^{2n+1}$.

Opgave 2. *(5 punten)* Zij $f(z) = \dfrac{e^{3z}}{z - \pi i}$.

(i) Bepaal $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz$ voor γ de cirkel gegeven door $|z - 1| = 4$;

(ii) Bepaal $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz$ voor γ de ellips gegeven door $|z - 2| + |z + 2| = 6$.

Opgave 3. *(7 punten)* Zij $f(z) = e^{z/(z-2)}$.

(i) Bepaal de Laurent reeks van $f(z)$ rond $z_0 = 2$ en geef het gebied aan waarop deze Laurent reeks convergeert.

(ii) Bepaal de residuën van $f(z)$ in $z_0 = 2$ en in $z_1 = 0$.

(iii) Geef het type van de singulariteiten van $f(z)$ aan in $z_0 = 2$ en $z_2 = \infty$.

Opgave 4. *(4 punten)*

(i) Zij $f(z)$ een op $\mathbb{C}$ holomorfe functie. Stel dat $|f(z)| \geq 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.
Laat zien dat $f(z)$ een constante functie is.

(ii) Zij $r > 0$ en zij Ω een gebied met $\overline{D}_r(0) \subseteq \Omega$. Laten $g(z)$ en $h(z)$ op Ω holomorfe functies zijn en stel dat $g(z) = h(z)$ voor $|z| = r$.
Laat zien dat $g(z) = h(z)$ voor alle $z \in \overline{D}_r(0)$.

Opgave 5. *(5 punten)* Bepaal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 10}\, dx.$$

Succes ermee!