

Tentamen Complexe Functies (kans A)

Opgave 1. (8 punten) Bepaal de waarden van de integralen

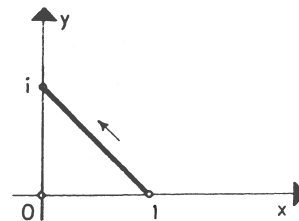
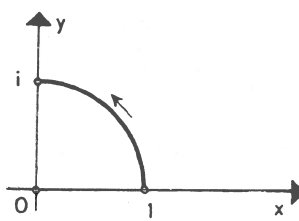
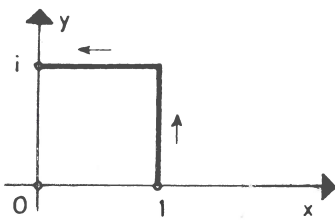
$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz \quad \text{en} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

voor telkens twee van de drie hieronder aangegeven paden γ_1 , γ_2 , γ_3 van $z_0 = 1$ naar $z_1 = i$.

γ_1 : loop eerst recht omhoog van 1 naar $1 + i$ en dan recht naar links naar i ;

γ_2 : loop op de eenheidscirkel;

γ_3 : loop op de rechte lijn van 1 naar i .



Oplossing: (4 punten) De integratie over γ_1 splitsen we op in twee deelstukken, $z(t) = 1 + it$ voor $t \in [0, 1]$, dan is $\operatorname{Re}(z(t)) = 1$ en $z'(t) = i$, en $z(t) = i + (1 - t)$ voor $t \in [0, 1]$, dan is $\operatorname{Re}(z(t)) = 1 - t$ en $z'(t) = -1$.

Samen geeft dit $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^1 1 \cdot i dt + \int_0^1 (1 - t) \cdot (-1) dt = i + \left(\frac{1}{2}(t - 1)^2\right)\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2} + i}$.

Voor γ_2 kiezen we de parametrisering $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ voor $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dan is $\operatorname{Re}(z(t)) = \cos t$ en $z'(t) = ie^{it} = -\sin t + i \cos t$. Hiermee geldt $\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (-\sin t + i \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \sin t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \cos^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i \frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{1}{2} + i \frac{\pi}{4}}$ (voor de tweede integraal: uit $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$ volgt dat $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$).

Het pad γ_3 heeft de parametrisering $z(t) = (1 - t) + it$ voor $t \in [0, 1]$, dan is $z'(t) = -1 + i$ en $\operatorname{Re}(z(t)) = 1 - t$. Hieruit volgt $\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^1 (1 - t)(-1 + i) dt = (-1 + i) \left(-\frac{1}{2}(t - 1)^2\right)\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}}$.

Merk op dat de drie waarden van de integralen verschillen, want $\operatorname{Re}(z)$ is geen holomorfe functie.

(4 punten) Voor $f(z) = \frac{1}{z}$ merken we op dat deze functie holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ is. We kunnen nu een gebied Ω kiezen dat alle drie de paden bevat, maar niet $z = 0$, bijvoorbeeld $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x + y > \frac{1}{2}\}$. Dan is Ω een enkelvoudig samenhangend gebied, f is holomorf in Ω en daarom hangen de integralen alleen van begin- en eindpunt af, maar niet van het gekozen pad.

In dit geval is γ_2 het meest handige pad, we kiezen de parametrisering $z(t) = e^{it}$ voor $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dan is $z'(t) = i e^{it}$ en er geldt $\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} i dt = \frac{\pi}{2} i$. De twee andere paden leveren dezelfde waarde op (en hoeven niet uitgewerkt te worden).

Opgave 2. (10 punten)

- (i) Zij $u, v \in \mathbb{C}$, $u, v \neq 0$, dan is $f(z) = \frac{1}{uz + v}$ holomorf in $z_0 = 0$.

Bepaal de Taylor reeks van $f(z)$ rond $z_0 = 0$ en geef de convergentiestraal van deze reeks aan.

- (ii) Bepaal voor de volgende functies het type van de singulariteit in $z_0 = 0$. Geef bij een pool de orde van de pool aan en bij een ophefbare singulariteit de waarde waarmee de functie holomorf in z_0 voortgezet kan worden.

(a) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$;

(b) $f(z) = \frac{\sin(z^3)}{1 - \cos(z^5)}$.

Oplossing:

- (i) **(4 punten)** De functie heeft als enkele singulariteit een simpele pool in $z = -\frac{v}{u}$, dus is de convergentiestraal $\frac{|v|}{|u|}$ (dit laat zich natuurlijk ook aan de Taylor reeks aflezen).

Herschrijf $f(z) = \frac{1}{uz + v} = \frac{1}{v} \frac{1}{1 + \frac{u}{v}z}$ dan volgt m.b.v. de meetkundige reeks dat

$$f(z) = \frac{1}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{u}{v}\right)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u)^n}{v^{n+1}} z^n.$$

- (ii) (a) **(3 punten)** De Taylor reeks van $e^z - 1$ in de noemer is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Voor $z \neq 0$ geldt dus $f(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots}$. Dit is dus een ophef-

bare singulariteit die met de waarde 1 in $z_0 = 0$ tot een holomorfe functie voortgezet kan worden.

- (b) **(3 punten)** Uitschrijven van de eerste termen van de Taylor ontwikkelingen van $\sin$ en $\cos$ laat zien dat $f(z) = \frac{z^3 - \frac{1}{6}z^9 + \dots}{\frac{1}{2}z^{10} - \frac{1}{24}z^{20} + \dots} = \frac{1}{z^7} \frac{1 - \frac{1}{6}z^6 + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}z^{10} + \dots}$. Hieruit volgt

dat $z_0 = 0$ een pool van orde 7 van deze functie is, want $g(z) = \frac{1 - \frac{1}{6}z^6 + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{24}z^{10} + \dots}$ is in $z_0 = 0$ holomorf met waarde $g(0) = 2$.

Opgave 3. (10 punten)

- (i) Zij γ een simpele gesloten kromme.

Bepaal $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ voor de gevallen dat:

- (a) $z_0 = 0$ binnen, maar $z_1 = 1$ buiten het gebied ligt dat door γ ingesloten wordt;
- (b) $z_0 = 0$ buiten, maar $z_1 = 1$ binnen het gebied ligt dat door γ ingesloten wordt;
- (c) $z_0 = 0$ en $z_1 = 1$ binnen het gebied liggen dat door γ ingesloten wordt.

(ii) De functie $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$ heeft singulariteiten voor de gehele getallen $z = n \in \mathbb{Z}$.

Geef voor iedere $n \in \mathbb{Z}$ het type van de singulariteit van f in $z_0 = n$ aan en bepaal het residu van f in $z_0 = n$.

Oplossing:

(i) Dit lossen we met de residuformule op, want $z_0 = 0$ en $z_1 = 1$ zijn juist de polen van de functie $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$ en de gezochte integraal is juist de som van de residuën binnen de contour.

(a) **(2 punten)** $z_0 = 0$ is een simpele pool, schrijf $f(z) = \frac{1}{z}g(z)$, dan is $g(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$ en dus $\text{res}_{z=0} f(z) = g(0) = 1$.

(b) **(3 punten)** $z_1 = 1$ is een pool van orde 3, schrijf $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}g(z)$, dan is $\text{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2}g''(1)$. Nu is $g(z) = \frac{-e^z}{z}$, dus $g'(z) = \frac{-e^z z + e^z}{z^2} = -e^z \frac{z-1}{z^2}$ en $g''(z) = -e^z \frac{z-1}{z^2} - e^z \frac{z^2 - (z-1)2z}{z^4}$ en dus $g''(1) = -e$. Er geldt dus $\text{res}_{z=1} f(z) = -\frac{e}{2}$.

(c) **(1 punt)** Uit (a) en (b) volgt rechtstreeks dat $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \text{res}_{z=0} f(z) + \text{res}_{z=1} f(z) = 1 - \frac{e}{2}$.

(ii) **(4 punten)** De Taylor ontwikkeling van $\sin(\pi z)$ in $z_0 = n$ is $\sin(\pi z) = \pi \cos(\pi n)(z-n) + \dots$, dus is $\sin(\pi z) = \pi(-1)^n(z-n) + \dots$ (want $\cos(\pi n) = 1$ voor n even en $\cos(\pi n) = -1$ voor n oneven). Hieruit volgt dat $z_0 = n$ een simpele pool is van $f(z)$ en $f(z) = \frac{1}{z-n}g(z)$ met $g(z)$ holomorf in $z_0 = n$ en $g(n) = \frac{1}{\pi(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\pi}$. Het residu van $f(z)$ in $z_0 = n$ is dus $\frac{(-1)^n}{\pi}$.

Opgave 4. (9 punten) Laat voor $a \in \mathbb{R}$ zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i a x}}{(1+x^2)^2} dx = \left(\frac{\pi}{2} + \pi^2 |a|\right) e^{-2\pi |a|}.$$

Hint: Het geval $a < 0$ laat zich eenvoudig uit het geval $a > 0$ afleiden.

Oplossing: Stel dat $a < 0$, substitueer dan $x' = -x$, dit geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i a x}}{(1+x^2)^2} dx = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{2\pi i a (-x')}}{(1+x'^2)^2} \cdot (-1) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i |a| x'}}{(1+x'^2)^2} dx'$$

en dit is weer de oorspronkelijke integraal - tot op de absolute waarde na. Als we de bewering dus voor $a \geq 0$ laten zien, geldt het voor $a < 0$ met a vervangen door $|a|$. Veronderstel dus vanaf nu dat $a \geq 0$.

Neem de functie $f(z) = \frac{e^{2\pi i a z}}{(1+z^2)^2}$ en als contour γ de bovenhalfcirkel van straal R rond 0.

Wegens $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ heeft $f(z)$ dubbele polen in $\pm i$, maar alleen de pool $z_0 = i$ ligt in het bovenhalfvlak.

Schrijf nu $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} g(z)$ met $g(z) = \frac{e^{2\pi i a z}}{(z+i)^2}$, dan is $f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2} (z-i)^n$ voor $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$ de Taylor ontwikkeling van $g(z)$ rond $z_0 = i$. In het bijzonder is dan $\text{res}_{z_0=i} f(z) = a_1 = g'(i)$.

Nu geldt $g'(z) = \frac{2\pi i a e^{2\pi i a z} (z+i)^2 - e^{2\pi i a z} 2(z+i)}{(z+i)^4}$ en dus

$$g'(i) = \frac{2\pi i a e^{-2\pi a} (-4) - e^{-2\pi a} 4i}{16} = e^{-2\pi a} \frac{-8\pi i a - 4i}{16} = e^{-2\pi a} \left(\frac{-\pi i a}{2} - \frac{i}{4} \right).$$

Volgens de residuformule is dan $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{res}_{z_0=i} f(z) = e^{-2\pi a} \left(\pi^2 a + \frac{\pi}{2} \right)$.

De integraal over de cirkelboog γ_R van straal R schatten we als volgt af: voor $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ wordt de teller $e^{2\pi i a R \cos \theta} e^{-2\pi a R \sin \theta}$ en wegens $\sin \theta \geq 0$ op de cirkelboog geldt dus $|e^{2\pi i a z}| \leq 1$ voor $z \in \gamma_R$. De noemer schatten we naar beneden af door $|(1+z^2)^2| \geq (R^2-1)^2$, samen geeft dit $|f(z)| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}$ voor $z \in \gamma_R$ en dus $|\int_{\gamma_R} \frac{e^{2\pi i a z}}{(1+z^2)^2} dz| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$. Het is duidelijk dat dit voor $R \rightarrow \infty$ naar 0 convergeert. (Voor $a > 0$ kan dit natuurlijk ook met behulp van het lemma van Jordan.)

In totaal volgt hieruit dat $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i a x}}{(1+x^2)^2} dx = e^{-2\pi a} \left(\pi^2 a + \frac{\pi}{2} \right)$.

Succes ermee!