

Tentamen Complexe Functies (kans B)

Opgave 1. (6 punten)

- (i) Zij $u(x, y) = \sin x (e^y + e^{-y})$.

Laat zien dat $u(x, y)$ een harmonische functie is en vind de geconjugeerde harmonische functie $v(x, y)$ met $v(0, 0) = 0$ zo dat $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ holomorf is op $\mathbb{C}$.

- (ii) Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| < 2$ en stel dat $f(z) = 12i$ voor alle z met $|z| = 1$.

Bepaal de functiewaarde $f(0)$.

- (iii) Bereken $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$ voor γ de cirkel van straal $\sqrt{\pi}$ rond 0.

Oplossing:

- (i) **(2 punten)** Men ziet rechtstreeks dat $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x (e^y + e^{-y}) = -u(x, y)$ en dat $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x (e^y + e^{-y}) = u(x, y)$, dus is $u(x, y)$ inderdaad harmonisch.

Om de geconjugeerde functie $v(x, y)$ te vinden, maken we gebruik van de Cauchy-Riemann vergelijkingen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x (e^y + e^{-y}) = \frac{\partial v}{\partial y}$ en integreren met betrekking tot y geeft $v(x, y) = \cos x (e^y - e^{-y}) + g(x)$. Wegens $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x (e^y - e^{-y}) = -\frac{\partial v}{\partial x}$ moet dan gelden dat $g'(x) = 0$ en uit de randvoorwaarde $v(0, 0) = 0$ volgt dan $g(x) = 0$, dus is $v(x, y) = \cos x (e^y - e^{-y})$.

- (ii) **(2 punten)** Dit laat zich op verschillende manieren inzien. Volgens de identiteitsstelling liggen de punten met $f(z) = 12i$ discreet, behalve als $f(z)$ constant is. Dus moet inderdaad $f(z)$ constant zijn en dan is $f(0) = 12i$.

Volgens de Gauss middelwaardeformule is $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 12i = 12i$.

En natuurlijk geeft ook expliciet uitrekenen met de Cauchy integraalformule hetzelfde resultaat.

- (iii) **(2 punten)** Uit de Taylorontwikkeling $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \dots$ volgt voor $\frac{\sin z}{z^2}$ de Laurent reeks $\frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \dots$. Dit betekent dat $\text{res}_0 f(z) = 1$ en dus is volgens de residuformule $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i \text{res}_0 f(z) = 2\pi i$.

Opgave 2. (6 punten)

- (i) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ voor de gevallen dat

(a) $a_n = \frac{n}{7^n}$;

(b) $a_n = (7 + (-1)^n)^n$.

- (ii) Bepaal voor de volgende functies het type van de singulariteit in $z_0 = 0$. Geef bij een pool de orde van de pool aan en bij een ophefbare singulariteit de waarde waarmee de functie holomorf in z_0 voortgezet kan worden.

(a) $f(z) = \frac{1 - \cos(z^2)}{z^4}$.

(b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{e^{z^2} - 1}$;

Oplossing:

(i) (2 punten)

(a) Wegens $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{7}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{7}$ en dus is de convergentiestraal 7.

(b) Wegens $\sqrt[n]{a_n} = 7 + (-1)^n$ is $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 7 + 1 = 8$ en dus is de convergentiestraal $\frac{1}{8}$.

- (ii) (4 punten) Dit ziet men door uitschrijven van de eerste termen van de Taylorontwikkelingen.

(a) $f(z) = \frac{\frac{z^4}{2} - \frac{z^8}{24} + \dots}{z^4} = \frac{1}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots$. Dit is een ophefbare singulariteit die met waarde $f(0) = \frac{1}{2}$ holomorf voortgezet kan worden.

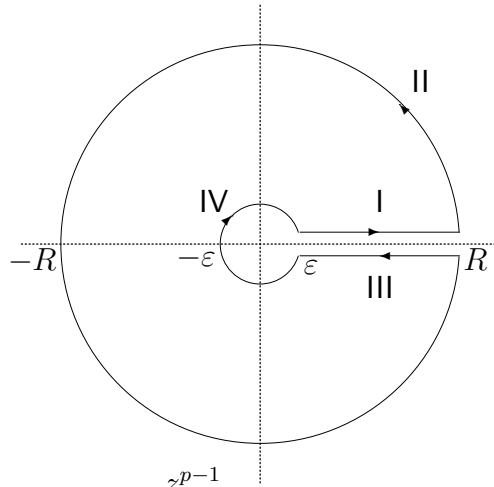
(b) $f(z) = \frac{1 - z + \frac{z^2}{2} - \dots}{z^2 + \frac{z^4}{2} + \dots} = \frac{1}{z^2} \frac{1 - z + \frac{z^2}{2} - \dots}{1 + \frac{z^2}{2} + \dots}$. Omdat de tweede term holomorf in $z_0 = 0$ is (met waarde 1), is $z_0 = 0$ een pool van orde 2 van $f(z)$.

Opgave 3. (6 punten) Laat voor $0 < p < 1$ zien dat

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Hint: Een sleutelgat contour is een overweging waard.

Oplossing:



(2 punten) Neem als functie $f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$ en de boven geschetste sleutelgat contour γ . De enige pool binnen deze contour is de simpele pool $z = -1$. Om het residu in deze pool uit te werken, schrijven we z^{p-1} als $e^{\log z(p-1)}$. Voor de complexe logaritme geldt $\log(-1) = i\pi$ (merk op dat we volgens de schets het argument tussen 0 en 2π nemen, de positieve reële as is weggehaald), dus is $\text{res}_{-1} f(z) = e^{i\pi(p-1)}$. Volgens de residuformule is dan $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i e^{i\pi(p-1)}$.

(1 punt) Het stuk I van de contour is de gezochte integraal, op het stuk III wordt $\frac{z^{p-1}}{1+z} = \frac{e^{(p-1)\log z}}{1+z} = \frac{e^{(p-1)(\log x + 2\pi i)}}{1+x}$, want we moeten 2π bij het argument optellen om de logaritme continu te maken. Hieruit volgt (let op de omgekeerde richting op het stuk III)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\text{III}} f(z) dz = - \int_0^{\infty} \frac{e^{(p-1)(\log x + 2\pi i)}}{1+x} dx = -e^{2\pi i(p-1)} \int_1^{\infty} f(z) dz.$$

(1 punt) Voor het stuk II met $|z| = R$ geldt $|f(z)| \leq \frac{R^{p-1}}{R-1}$ en dus $|\int_{|z|=R} f(z) dz| \leq 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R-1} = 2\pi \frac{R^p}{R-1} = 2\pi \frac{1}{R^{1-p} - R^{-p}} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$ (want wegens $p < 1$ is $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-p} = \infty$ en wegens $p > 0$ is $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-p} = 0$).

(1 punt) Voor het stuk IV met $|z| = \varepsilon$ geldt $|f(z)| \leq \frac{\varepsilon^{p-1}}{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon^{p-1}$ en dus $|\int_{|z|=\varepsilon} f(z) dz| \leq 4\pi\varepsilon^p \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ (want $0 < p < 1$).

(1 punt) Samen geeft dit $(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi(p-1)}$, dus

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{i\pi(p-1)}}{(1 - e^{2\pi i(p-1)})} = \pi \frac{2i}{e^{-i\pi(p-1)} - e^{i\pi(p-1)}} = \frac{\pi}{-\sin(\pi(p-1))} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

(want $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$).

Opgave 4. (7 punten) Zij $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$.

- (i) Laat zien dat $f(z)$ een meromorfe functie is, d.w.z. dat $f(z)$ geïsoleerde polen heeft, maar geen essentiële singulariteit.

Geef expliciet de punten $z \in \mathbb{C}$ aan waar $f(z)$ een pool heeft en geef telkens de orde van de pool aan.

- (ii) Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ de Laurent reeks van $f(z)$ rond $z_0 = 0$.

Bepaal de coëfficiënten a_n voor $n < 0$.

- (iii) Bepaal de maximale straal $r > 0$ waarvoor de in (ii) aangegeven Laurent reeks op de gepunteerde schijf $D_r^\times(0)$ convergeert.

Oplossing:

- (i) **(3 punten)** De polen van $f(z)$ zijn de nulpunten van de noemer, dit zijn $z = 0$ en de punten met $e^z = 1$, d.w.z. de punten $z = 2\pi in$ met $n \in \mathbb{Z}$.

Omdat $(e^z)' = e^z$ is de Taylorontwikkeling van $e^z - 1$ in $z_0 = 2\pi in$ gegeven door $e^z - 1 = (z - 2\pi in) + \frac{1}{2}(z - 2\pi in)^2 + \frac{1}{6}(z - 2\pi in)^3 + \dots$ (dit volgt ook uit het feit dat e^z een $2\pi i$ -periodieke functie is). Dan is $2\pi in$ een pool van orde 1 van $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z - 2\pi in} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(z - 2\pi in) + \dots}$, want de tweede term is een holomorfe functie (met waarde 1 in $z_0 = 2\pi in$). Dit laat zien dat $z_0 = 0$ een pool van orde 2 is van $f(z)$ en $z_0 = 2\pi in$ voor $n \neq 0$ een pool van orde 1.

- (ii) **(3 punten)** Met behulp van de Taylorontwikkeling van e^z in $z_0 = 0$ zien we dat $f(z) = \frac{1}{z(z + \frac{z^2}{2} + \dots)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \dots} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{g(z)}$. Wegens $g(0) \neq 0$ is $\frac{1}{g(z)}$

holomorf in $z_0 = 0$ en we schrijven $\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$. Dan is $b_0 = \frac{1}{g(0)} = 1$

en $b_1 = (\frac{1}{g(z)})'_{z=0} = \frac{-g'(z)}{g(z)^2}_{z=0} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$. Alternatief laten zich b_0 en b_1 ook bepalen uit $g(z) \cdot (b_0 + b_1 z + \dots) = 1$, d.w.z. $(1 + \frac{z}{2} + \dots)(b_0 + b_1 z + \dots) = 1$, want samenvatten van de termen van dezelfde graad geeft $b_0 = 1$ en $b_1 + \frac{1}{2}b_0 = 0$, dus $b_1 = -\frac{1}{2}$.

Omdat z_0 een pool van orde 2 is, volgt hiermee dat $a_{-2} = 1$, $a_{-1} = -\frac{1}{2}$ en $a_n = 0$ voor $n < -2$.

- (iii) **(1 punt)** De maximale straal is de afstand tot de dichtstbij liggende singulariteit en dat zijn $\pm 2\pi i$, dus is de maximale straal 2π .

Succes ermee!