

**Calculus 3. Tentamen Calculus 3, 15 juli 2011**

**Opgave 1.** Zij  $f(x, y, z) = x^2 + 2x + y^2 - 1$  en  $g(x, y, z) = x^2 + 2x + 2z$ .

i) (5 pnt) Laat zien dat  $p = (0, 1, 0)$  op de oppervlakken  $f(x, y, z) = 0$  en  $g(x, y, z) = 0$  ligt en bereken de gradienten van  $f$  te  $p$  en van  $g$  te  $p$ .

ii) (5 pnt) Bereken de hoek die de vlakken  $f(x, y, z) = 0$  en  $g(x, y, z) = 0$  te  $p$  met elkaar maken.

**Opgave 2.** Zij  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de functie gegeven door

$$f(x, y) = 2x^3 - 2y^3 - 4xy + 5$$

(10 pnt) Bepaal alle punten waar deze functie een relatief extreem of een zadelpunt heeft en beschrijf de aard van ieder van deze punten, d.w.z. geef bij ieder gevonden punt aan of het een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt is.

**Opgave 3.** Zij  $D$  het gebied gegeven door

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 - 4y \leq 0\}$$

Zij  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de functie gegeven door  $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ .

i) (3 pnt) Laat zien dat  $f$  op  $D$  een maximum en een minimum aanneemt.

ii) (7 pnt) Bereken in welke punten van  $D$   $f$  het maximum en het minimum aanneemt en bereken de waarde van  $f$  in die punten.

**Opgave 4.** i) (5 pnt) Zij  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  het vectorveld gegeven door

$$F(x, y, z) = (yz^2, xz^2 - z, 2xyz - y)$$

Bepaal een functie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  zodat  $F = \nabla(f)$ .

ii) (5 pnt) Zij  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de kromme gegeven door

$$c(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 15 \right)$$

Bereken de lengte van deze kromme.