Tentamen Calculus 2
25 januari 2010, 9:00 -12:00 uur

Je mag geen rekenapparaat gebruiken.

De opgaven 1 t.e.m. 6 tellen allemaal even zwaar.

Vermeld op elk papier dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef bij elke opgave niet alleen het antwoord, maar leg ook uit waarom het door jou gegeven antwoord het goede antwoord is. In het bijzonder: laat goed zien waar en hoe je partiële integratie of integratie door substitutie toepast.

Veel succes!

1a. Bereken $\int_{-2}^{1} |1 - x^2| dx$.

1b. Bereken $\int_0^{\pi} \sin^3(x) dx$.

2a. Bereken $\int_1^2 \frac{1}{x^3-1} dx$.

2b. Bereken $\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3} dx$.

3a. Bepaal een differentieerbare functie f van $[0, \infty)$ naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan:

voor elke x in $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x^2}{(f(x))^3}$ en $f(1) = 1$.

Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

3b. Bepaal een tweemaal differentieerbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan:

voor elke x in $\mathbb{R}$, $f''(x) = -9f(x)$ en $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.

Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

Laat ook zien dat de door jou gevonden functie de enige functie is die aan de eisen voldoet.

3c. Bepaal een tweemaal differentieerbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan:

voor elke x in $\mathbb{R}$, $f''(x) = -9f(x) + \sin(x)$ en $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.

Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

4. Zij R de verzameling van alle punten (x, y) in $\mathbb{R}^2$ die voldoen aan: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(x) \leq y \leq 1$.

4a. Maak een schets van R en bereken de oppervlakte van R.

4b. Bereken het zwaartepunt van R.

4c. Bereken de inhoud van de ruimtelijke figuur die ontstaat door R om de y-as te wentelen.

5a. Ga na of de volgende limiet bestaat. Zonee, leg uit waarom niet; zoja, bereken zijn waarde.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

5b. De volgende integraal is een oneigenlijke integraal.

Ga na of deze oneigenlijke integraal bestaat. Zonee, leg uit waarom niet; zoja, bereken zijn waarde.

$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} dx$.

6a. Bereken reële getallen a en b zó dat $\frac{3+4i}{3-4i} = a + bi$. Schets de positie van $\frac{3+4i}{3-4i}$ in het complexe vlak en bereken reële getallen r en ϕ zó dat $\frac{3+4i}{3-4i} = re^{i\phi}$.

6b. Bereken reële getallen a en b zó dat $a + bi = (1 + i)^8$.

6c. Bereken alle paren reële getallen (a, b) zó dat het complexe getal $z = a + bi$ voldoet aan $z^2 + (1 + i)z + 1 = 0$.

Antwoorden Tentamen Calculus 2 25 januari 2010

1a. *Vraag:* Bereken $\int_{-2}^{1} |1-x^2|dx$.

Antwoord: Merk op: voor elke x in $[-2,1]$, als $-2 \leq x \leq -1$, dan $1 \leq x^2$, en dus $|1-x^2| = x^2-1$, en, als $-1 \leq x \leq 1$, dan $x^2 \leq 1$ en dus $|1-x^2| = 1-x^2$. Dus $\int_{-2}^{1} |1-x^2|dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = (\frac{1}{3}x^3 - x)|_{x=-2}^{x=-1} + (x - \frac{1}{3}x^3)|_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

1b. *Vraag:* Bereken $\int_0^{\pi} \sin^3(x)dx$.

Antwoord: Merk op: $\int_0^{\pi} \sin^3(x)dx = \int_0^{\pi} \sin^2(x)\sin(x)dx = \int_0^{\pi}(1-\cos^2(x))\sin(x)dx$.

We gaan gebruik maken van de methode: *integratie door substitutie.*

Definieer de functie f van $[0,\pi]$ naar $[0,1]$ door: voor alle x in $[0,\pi]$: $f(x) = \cos(x)$.

Dan, voor alle x in $[0,\pi]$, $f'(x) = -\sin(x)$.

Definieer de functie g van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$ door: voor alle y in $[0,1]$: $g(y) = 1-y^2$.

Definieer de functie G van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$ door: voor alle y in $[0,1]$: $G(y) = y - \frac{1}{3}y^3$ en merk op: voor alle y in $[0,1]$: $G'(y) = g(y)$.

Dan: $\int_0^{\pi}(1-\cos^2(x)\sin(x)dx = \int_0^{\pi} G'(f(x)(-f'(x)dx = -\int_0^{\pi} G'(f(x)f'(xdx = -\int_{f(0)}^{f(\pi)} G'(y)dy = -(G(f(\pi)) - G(f(0))) = G(f(0)) - G(f(\pi)) = G(1) - G(0) = G(1) = \frac{2}{3}$.

2a. *Vraag:* Bereken $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$.

Antwoord: We gaan gebruik maken van de methode: *integratie door substitutie.*

Definieer de functie f van $[1,2]$ naar $[1,2]$ door: voor alle x in $[1,2]$: $f(x) = x^2+x+1$. Dan voor alle x in $[1,2]$, $f'(x) = 2x+1$.

Definieer de functie g van $[1,2]$ naar $[1,2]$ door: voor alle y in $[1,2]$: $g(y) = \ln(y)$. Dan, voor alle y in $[1,2]$, $g'(y) = \frac{1}{y}$.

Dan $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_1^2 g'(f(x))f'(x)dx = \int_{f(1)}^{f(2)} g'(y)dy = \int_3^7 g'(y)dy = g(7) - g(3) = \ln(7) - \ln(3) = \ln(\frac{7}{3}) = \ln(2\frac{1}{3})$.

Vraag: Bereken $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

Antwoord: $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_1^2 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int_1^2 \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}dx$.

We gaan gebruik maken van de methode: *integratie door substitutie.*

Definieer de functie f van $[1,2]$ naar $[\sqrt{3}, \frac{5}{3}\sqrt{3}]$ door: voor alle x in $[1,2]$: $f(x) = \sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})$. Dan voor alle x in $[1,2]$, $f'(x) = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Definieer de functie g van $[\sqrt{3}, \frac{5}{3}\sqrt{3}]$ naar $\mathbb{R}$ door: voor alle y in $[\sqrt{3}, \frac{5}{3}\sqrt{3}]$, $g(y) = \arctan(y) = \tan^{-1}(y)$. Dan, voor alle y in $[\sqrt{3}, \frac{5}{3}\sqrt{3}]$, $g'(y) = \frac{1}{y^2+1}$.

Dus: $\frac{4}{3}\int_1^2 \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}dx = \sqrt{\frac{4}{3}}\int_1^2 \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}\sqrt{\frac{4}{3}}dx = \sqrt{\frac{4}{3}}\int_1^2 g'(f(x))f'(x)dx$ $= \sqrt{\frac{4}{3}}\int_{f(1)}^{f(2)} g'(y)dy = \sqrt{\frac{4}{3}}(g(f(1)) - g(f(0))) = \sqrt{\frac{4}{3}}(\arctan(\frac{5}{3}\sqrt{3}) - \arctan(\sqrt{3})$.

Vraag: Bereken $\int_1^2 \frac{1}{x^3-1}dx$.

Antwoord: We merken eerst op: dit is een *oneigenlijke integraal* omdat de functie $x \mapsto \frac{1}{x^3-1}$ niet gedefinieerd is in het punt 1.

Om te bepalen of de integraal bestaat merken we op: voor elke x in $(1,2]$, $x^3 = (x-1)(x^2+x+1)$. We hebben geleerd dat we de functie $x \mapsto \frac{1}{x^3-1}$ nu met behulp van *breuksplitsing* eenvoudiger kunnen schrijven. We zoeken reële getallen a, b, c zódat, voor elke x in $(1,2]$, $\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$, dus: $a+b=0$ en $a-b+c=0$ en $a-c=1$, dus: (tel alles op) $3a=1$, d.w.z. $a=\frac{1}{3}$ en $b=-\frac{1}{3}$ en $c=-\frac{2}{3}$.

Dus: voor elke y in $(1,2]$, $\int_y^2 \frac{1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int_y^2 \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int_y^2 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$.

We zien nu: voor elke y in $(1,2]$, $\int_y^2 \frac{1}{x-1}dx = \ln(x-1)|_{x=y}^{x=2} = \ln(1) - \ln(y-1) = \ln(y-1)$.

Maar: $\lim_{y\to 1}\ln(y-1) = -\infty$; je kunt ook zeggen: deze limiet bestaat niet.

Verder: $\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}dx$.
We kunnen de uitkomst berekenen met behulp van de twee zojuist uitgerekende integralen.

$\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}(\ln(2\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{4}{3}}(\arctan(\frac{5}{3}\sqrt{3}) - \arctan(\sqrt{3}))$.

Conclusie: $\int_1^2 \frac{1}{x^3-1}dx = \infty$, of: $\int_1^2 \frac{1}{x^3-1}dx$ bestaat niet.

2b. *Vraag:* Bereken $\int_0^1 \sqrt{x^2-x^3}dx$.

Antwoord: We gaan gebruik maken van de methode: *partiële integratie*.

Merk op: $\int_0^1 \sqrt{x^2-x^3}dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$.

Definieer functies F, G van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$ door: voor alle x in $[0,1]$, $F(x) = x$ en $G(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$.

Dan zijn de functies F, G beide differentieerbaar, en voor alle x in $[0,1]$, $F'(x) = 1$ en $G'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$.

Dus: $\int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 F(x)G'(x)dx = F(x)G(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 F'(x)G(x)dx = -\int_0^1(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}})dx = \frac{2}{3}\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}dx = -\frac{2}{5}\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{5}{2}}|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{15}$.

3a. *Vraag:* Bepaal een differentieerbare functie f van $[1,\infty)$ naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan:

voor elke x in $[1,\infty)$, $f'(x) = \frac{x^2}{(f(x))^3}$ en $f(1) = 1$.

Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

Antwoord:

Stel: de functie f voldoet aan de eisen. Dan, voor elke x in $[1,\infty)$, $(f(x))^3 f'(x) = x^2$. Definieer een functie g van $[1,\infty)$ naar $\mathbb{R}$ door: voor alle x in $[1,\infty)$, $g(x) = \frac{1}{4}(f(x))^4$. We zien dan: g is differentieerbaar, en, voor alle x in $[1,\infty$ $g'(x) = (f(x))^3 f'(x) = x^2$. Dus: er bestaat een getal c in $\mathbb{R}$ zó, dat voor elke x in $[1,\infty)$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, dus: $\frac{1}{4}(f(x))^4 = \frac{1}{3}x^3 + c$, dus: $f(x) = (\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}c)^{\frac{1}{4}}$ of $f(x) = -(\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}c)^{\frac{1}{4}}$. Maar $f(1) = 1$ dus: $c = -\frac{1}{4}$ en, voor elke x in $[1,\infty)$, $f(x) = (\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}$.

3b. *Vraag:* Bepaal een tweemaal differentieerbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan:

voor elke x in $\mathbb{R}$, $f''(x) = -9f(x)$ en $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.

Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

Laat ook zien dat de door jou gevonden functie de enige functie is die aan de eisen voldoet.

Antwoord: We hebben geleerd: als f een functie is die aan de eisen voldoet, bestaan er reële getallen A, B zó dat voor elke x in $\mathbb{R}$, $f(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$, en dus, voor elke x in $\mathbb{R}$, $f'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$. We weten $f(0) = 1$, dus $A = 1$. We weten ook: $f'(0) = 1$, dus: $B = \frac{1}{3}$. De functie f gedefinieerd door: voor alle x in $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$, voldoet dus aan de eisen.

Stel dat ook de functie g aan de eisen voldoet. Definieer dan de functie h door: voor alle x in $\mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ en merk op: voor alle x in $\mathbb{R}$, $h''(x) = -9h(x)$ en $h(0) = h'(0) = 0$. Bekijk nu de functie k die gedefinieerd is door: voor alle x in $\mathbb{R}$, $k(x) = 9(h(x))^2 + (h'(x))^2$. Merk op: voor elke x in $\mathbb{R}$, $k'(x) = 18h(x).h'(x) + 2h'(x).h''(x) = 0$, dus, voor alle x in $\mathbb{R}$, $k(x) = k(0) = 0$, dus voor alle x in $\mathbb{R}$, $h(x) = h'(x) = 0$ en $f(x) = g(x)$.

Er is dus maar één functie f die aan de eisen voldoet.

3c. *Vraag:* Bepaal een tweemaal differentieerbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die voldoet aan:

voor elke x in $\mathbb{R}$, $f''(x) = -9f(x) + \sin(x)$ en $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.

Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

Antwoord: We weten dat er reële getallen C, D bestaan zodat de functie g, gedefinieerd door: voor alle x in $\mathbb{R}$, $g(x) = C\cos(x) + D\sin(x)$ voldoet aan:

voor alle x in $\mathbb{R}$, $g''(x) = -9g(x) + \sin(x)$. Laten we C, D uitrekenen. Voor alle x in $\mathbb{R}$, $g''(x) = -C\cos(x) - D\sin(x) = -9C\cos(x) - 9D\sin(x) + \sin(x)$, dus: $8C\cos(x) + (8D-1)\sin(x) = 0$, dus $C = 0$ en $D = \frac{1}{8}$, en, voor elke x in $\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{8}\sin(x)$.

In het algemeen heeft een oplossing f de vorm: voor elke x in $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{8}\sin(x) + A\cos(3x) + B\sin(3x)$.

We weten: $f(0) = 1$, dus: $A = 1$.

We weten ook: voor elke x in $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{8}\cos(x) + -3\sin(3x) + 3B\cos(3x)$, en $f'(0) = 1$, dus: $\frac{1}{8} + 3B = 1$, dus: $B = \frac{7}{24}$.

De gevraagde functie is dus de functie f die voldoet aan: voor elke x in $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{8}\sin(x) + \cos(3x) + \frac{7}{24}\sin(3x)$.

4. Zij R de verzameling van alle punten (x, y) in $\mathbb{R}^2$ die voldoen aan: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ en $\cos(x) \leq y \leq 1$.

4a. *Vraag:* Maak een schets van R en bereken de oppervlakte van R.

Antwoord: De oppervlakte van R is $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos(x))dx = x - \sin(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}\pi - 1$.

4b. *Vraag:* Bereken het zwaartepunt van R.

em Antwoord: De coördinaten van het zwaartepunt Z noemen we x_0, y_0.

Dan $x_0 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x(1-\cos(x))dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos(x))dx}$.

Nu is $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{8}\pi^2$.

En: $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\cos(x)dx = x\sin(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin(x)dx = \frac{1}{2}\pi + \cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}\pi - 1$.

Dus $x_0 = \frac{\frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi + 1}{\frac{1}{2}\pi - 1}$.

Dan: $y_0 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos(x))\frac{1+\cos(x)}{2}dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos(x))dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos^2(x))dx}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos(x))dx}$.

Maar: $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos^2(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2(\frac{1}{2}\pi - x)dx = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2(x)dx$.

En: $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1dx = \frac{1}{2}\pi$. Dus $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2(x)dx = \frac{1}{4}\pi$.

Dus: $y_0 = \frac{\frac{1}{8}\pi}{\frac{1}{2}\pi - 1} = \frac{\pi}{4\pi - 8}$.

4c. *Vraag:* Bereken de inhoud van de ruimtelijke figuur die ontstaat door R om de y-as te wentelen.

Antwoord: De gevraagde inhoud is $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2\pi x(1-\cos(x))dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x(1-\cos(x))dx = 2\pi(\frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi + 1)$.

5a. *Vraag:* Ga na of de volgende limiet bestaat. Zonee, leg uit waarom niet; zoja, bereken zijn waarde.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Eerste manier: We kunnen de driemaal de regel van l'Hôpital toepassen: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}$.

Tweede manier: De vierde-graads Taylor-veelterm van de functie sin in het punt 0 is: $x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$. We weten, (gebruik makend van de stelling van Taylor): voor elke x in $\mathbb{R}$, $|\sin(x) - (x - \frac{x^3}{6})| \leq \frac{|x|^5}{5!}$. Dus: voor elke x in $\mathbb{R}$, als $x \neq 0$, dan $|\frac{\sin(x)-(x-\frac{x^3}{6})}{x^3}| \leq \frac{x^2}{5!}$. Dus $\lim_{x\to 0} |\frac{\sin(x)-x}{x^3} + \frac{1}{6}| = 0$. Dus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

5b. *Vraag:* De volgende integraal is een oneigenlijke integraal.
Ga na of deze oneigenlijke integraal bestaat. Zonee, leg uit waarom niet; zoja, bereken zijn waarde.

$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

Voor elke $y > 1$, $\int_1^y \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^y \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx = -3\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}|_{x=1}^{x=y} = -3\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} + 3$.

Merk op: $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = 0$.

Dus: $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = 3$.

6a. *Vraag:* Bereken reële getallen a en b zó dat $\frac{2+i}{2-i} = a + bi$. Schets de positie van $\frac{2+i}{2-i}$ in het complexe vlak en bereken reële getallen r en ϕ zó dat $\frac{2+i}{2-i} = re^{i\phi}$.

Antwoord: $\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2+i)(2-i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = e^{i\arctan(\frac{4}{3})}$.

6b. *Vraag:* Bereken reële getallen a en b zó dat $a + bi = (1+i)^7$.

Antwoord: Merk op: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Dus $(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7 e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)) = 8 - 8i$.

6c. *Vraag:* Bereken alle paren reële getallen (a, b) zó dat het complexe getal $z = a + bi$ voldoet aan $z^2 + (1+i)z + 1 = 0$.

Antwoord: Stel: z voldoet aan: $z^2+(1+i)z+1=0$. Dan $(z+\frac{1}{2}(1+i))^2 = \frac{1}{4}(1+i)^2-1 = \frac{1}{4}2i-1 = -1+\frac{1}{2}i$. We zoeken eerst reële getallen c, d zó, dat $(c+di)^2 = -1+\frac{1}{2}i$. c, d moeten dan voldoen aan: $c^2-d^2=-1$ en $2cd=\frac{1}{2}$. Dus: $d=\frac{1}{4c}$ en $c^2-\frac{1}{16c^2}=-1$, oftewel: $16c^4+16c^2-1=0$. Dus $(4c^2+2)^2=5$, dus $4c^2+2=\sqrt{5}$ en $c_1=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$ en $c_2=-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Verder: $d_1=\frac{1}{4c_1}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+2}$ en $d_2=\frac{1}{4c_2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+2}$.

De twee oplossingen zijn: $z_1=-\frac{1}{2}(1+i)+(c_1+d_1i)=(c_1-\frac{1}{2})+(d_1-\frac{1}{2})i$ en $z_2=-\frac{1}{2}(1+i)+(c_2+d_2i)=(c_2-\frac{1}{2})+(d_2-\frac{1}{2})i$, dus: $(a_1,b_1)=(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+2}-\frac{1}{2})$ en: $(a_2,b_2)=(-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+2}-\frac{1}{2})$

Bonus-opgave. Bewijs dat er geen natuurlijk getal $n>0$ bestaat zó dat $(\frac{2+i}{2-i})^n=1$.

Antwoord: We hebben zojuist gezien: $\frac{2+i}{2-i}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i=\frac{1}{5}(3+4i)$. We beweren: voor elke $n>0$ bestaan er getallen a_n, b_n zó, dat $(\frac{2+i}{2-i})^n=\frac{1}{5^n}(a_n+b_ni)$. We zien: $a_1=3$ en $b_1=4$, en, voor elke $n>0$, $a_{n+1}=3a_n-4b_n$ en $b_{n+1}=3b_n+4a_n$. Dus: voor elke n, a_n en b_n zijn gehele getallen. Bovendien beweren we: voor elke $n>0$, $a_n\equiv 3 \pmod 5$ en $b_n\equiv 4 \pmod 5$. We bewijzen dat met volledige inductie. Merk eerst op $a_1\equiv 3 \pmod 5$ en $b_1\equiv 4 \pmod 5$. Neem nu aan: $n\in\mathbb{N}$ en $a_n\equiv 3 \pmod 5$ en $b_n\equiv 4 \pmod 5$. Dan $a_{n+1}\equiv 3.3-4.4\equiv -7\equiv 3 \pmod 5$ en $b_{n+1}\equiv 3.4+4.3\equiv 24\equiv 4 \pmod 5$.

We kunnen concluderen: voor elke $n>0$, $a_n\neq 5^n$, dus $(\frac{2+i}{2-i})^n\neq 1$.