

Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 1 NWI-NP003B
5 november 2012, 8.30–11.30

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon en boek(en) is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

1. Het polynoom $p(x) = x^6 + x^3 - 2$ wordt beschouwd als functie $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Laat zien dat p een nulpunt heeft in het interval $(-2, 0)$ en in het interval $(0, 2)$.
(b) Bepaal alle complexe nulpunten van p .

2. Bepaal de afgeleides van de volgende functies:

$$\arcsin(\sqrt{x}) \qquad \int_{-x^2}^{e^x} \cos^2(\sin t) \cos(t) dt$$

3. Bepaal de volgende integralen:

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx \qquad \int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} dx$$

4. De kromme in \mathbb{R}^2 wordt gegeven in poolcoördinaten door middel van $r = 3 + \varphi \cos(\varphi)$. Het punt $(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}, \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{8})$ in Cartesische coördinaten correspondeert met $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in poolcoördinaten. Wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn (in Cartesische coördinaten) aan de kromme in dit punt?

5. Stel $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ met domein \mathbb{R} .

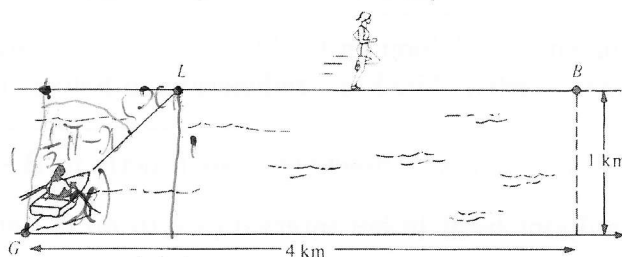
- (a) Bepaal de nulpunten van f , en geef aan waar f positief/negatief is.
(b) Heeft f (scheve/horizontale/verticale) asymptoten?
(c) Bepaal de afgeleide van f .
(d) Bepaal de extreme waarden (maxima/minima en lokaal/globaal) van f .
(e) Laat zien dat de afgeleide functie de waarde -1 aanneemt in het interval $(-1, 0)$.

6. Vereenvoudig $\tan(\arccos x)$.

7. De juiste formulering van de tussenwaardstelling is:¹

- (a) De functie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neemt elke waarde uit zijn bereik aan.
(b) Een continue functie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.
(c) Een functie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.
(d) Elke continue functie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar.

¹Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek.



Figuur 1: Plaatje voor opgave 8.

8. (Zie Figuur 1). Stella vertrekt van het punt G , en zij wil naar punt B , en wel zo snel mogelijk. Het kanaal is 1 km breed, en het corresponderende punt B aan de overkant is 4 km verderop. Het water is stilstaand. Ze roeit 4 km/u en ze loopt hard met een snelheid van 16 km/u. Wat is haar optimale route?

9. ²

- (a) Veronderstel dat f and g continue functies zijn op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) . Veronderstel bovendien dat $g(a) \neq g(b)$. Laat zien dat er een $c \in (a, b)$ bestaat met

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- (b) Laat zien dat als f en g differentieerbare functies zijn met $f(0) = g(0) = 0$ en $g(x) \neq 0$ voor $x \neq 0$, dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

aangenomen dat beide limieten bestaan.

- (c) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2 + x^4}$$

Normering											
Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	10	10	10	10	15	6	6	8	15	10	100

Het tentamencijfer T is de gebruikelijke afronding van (het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10)

²Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.