Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 1 NWI-NP003B
4 januari 2013, 8.30–11.30

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon en boek(en) is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Bekijk $p(x) = x^3 + ax + b$ voor (vast gekozen) $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Laat zien dat p minstens één reëel nulpunt heeft.
   (b) Neem nu $p(x) = x^3 - 2x - 4$ en bepaal alle (dus ook de eventuele complexe) nulpunten van p.

2. Bepaal de afgeleides van de volgende functies:
$$\frac{\cos(x^2)}{1 + e^{3x}}, \qquad \int_{-\sqrt{x}}^{\cos(x)} e^{-t^4 - t^2}\, dt$$

3. Bepaal de volgende integralen:
$$\int_{\frac{1}{4}\sqrt{\pi}}^{1} x \cos(x^2)\, dx, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx$$

4. Een kromme in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven $x^2 + y^2 = 8 - 6e^{-xy}$.
   (a) Bepaal door middel van impliciet differentiëren de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (x_0, y_0) van deze kromme.
   (b) Bepaal de raaklijn aan de kromme in het punt $(\sqrt{2}, 0)$.

5. Stel $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2\ln(x)}$.
   (a) Op welk domein is f gedefinieerd?
   (b) Heeft f (scheve/horizontale/verticale) asymptoten?
   (c) Wat is $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$?
   (d) Bepaal de afgeleide van f.
   (e) Bepaal de extreme waarden (maxima/minima en lokaal/globaal) van f, waarbij het domein van f wordt uitgebreid met 0 en $f(0)$ is de limiet van (c).
   (f) Bereken f'', en laat zien dat f concaaf naar boven is voor $x > 1$.

6. Bepaal $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

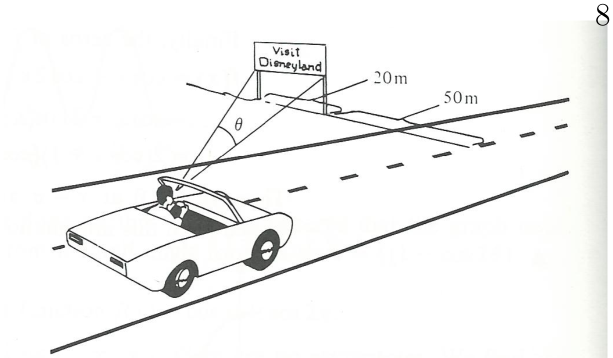
7. De juiste formulering van de middelwaardestelling is:[1]

   (a) Veronderstel dat $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continu is dan geldt dat f elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aanneemt.

   (b) Veronderstel dat $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ differentieerbaar is, dan geldt $\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$.

   (c) Veronderstel dat $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continu is en differentieerbaar op (a,b) is, dan bestaat er een $c\in(a,b)$ met $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

   (d) Zij $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ een differentieerbare functie, dan geldt dat er een $c\in(a,b)$ met $c\in(a,b)$ met $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.



8. U rijdt in een auto (waarbij u uw hoofd precies over de streep midden op de weg beweegt). Het bord met de tekst *Visit Disneyland* staat in een lijn loodrecht op de rechte weg. Het bord is 20 meter breed, en staat 50 meter van de middenstreep van de weg. De hoek θ is de hoek van de lijn met uw hoofd en de rechterpoot van het reclamebord en de lijn van uw hoofd met de linkerpoot van het reclamebord. Op welke plaats op de weg is θ maximaal?

9. [2]

   (a) Veronderstel dat $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ een polynoom is met een dubbel nulpunt in a en b met $a<b$, dat wil zeggen dat de multipliciteit twee is. Laat zien dat $f'\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ minstens drie nulpunten in het interval $[a,b]$ heeft.

   (b) Hoe verandert de uitspraak in (a) als de multipliciteit van het nulpunt in a en b van f gelijk is aan drie?

   (c) Gegeven een continue functie $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ waarvoor f' en f'' bestaan op (a,b). Veronderstel dat $f(a)=f(b)=0$ en dat $x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)\geq 0$ voor alle $x\in(a,b)$. Bewijs dat $f(x)\leq 0$ voor alle $x\in[a,b]$.

Normering											
Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	8	10	10	10	15	6	6	10	15	10	100

Het tentamencijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10

[1] Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek.

[2] Voor deze opgave scoort u minimaal $H\cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H\geq 6.0$ is.

Opgave 1.

(a) Omdat $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ en $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, en p een polynoom (en dus continu) is, volgt dat er een interval $[-m, m]$ is met $p(-m) < 0$ en $p(m) > 0$.

(U kunt dit ook precies maken, als volgt: stel $m = 2\max(|a|, |b|, 1) \leq 2$, dan is het polynoom positief voor $x = m$ en negatief voor $x = -m$. Inderdaad,

$$p(m) = m^3 + am + b \geq m^3 - m^2 - m = m(m^2 - m - 1) > 0$$

want deze heeft nulpunten in $m = 0$, $m = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} \leq 2$. En ook

$$p(-m) = -m^3 + am + b \leq -m^3 + m^2 + m = -m(m^2 - m - 1) < 0.)$$

Omdat het polynoom beperkt tot $[-m, m]$ continu is, geeft de tussenwaardestelling dat p een nulpunt heeft in $[-m, m] \subset \mathbb{R}$. En dus is er minstens één reëel nulpunt.

(b) Volgens (a) is er een reëel nulpunt. Proberen of zien levert $p(2) = 0$. Dus we kunnen schrijven $p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$ door staartdeling of anderzins. Dan

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 = 0 \implies (x + 1) = \pm i \implies x = -1 \pm i.$$

Dus er zijn drie nulpunten; 2, $-1 - i$, $-1 + i$.

Opgave 2. Met de qoutiëntregel

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos(x^2)}{1 + e^{3x}} = \frac{-2x\sin(x^2)(1 + e^{3x}) - 3\cos(x^2)e^{3x}}{(1 + e^{3x})^2}$$

Met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening

$$\frac{d}{dx}\int_{-\sqrt{x}}^{\cos(x)} e^{-t^4 - t^2}\, dt = -e^{-\cos^4(x) - \cos^2(x)}\sin(x) - e^{-x^2 - x}\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$
$$= -e^{-\cos^4(x) - \cos^2(x)}\sin(x) + \frac{e^{-x^2 - x}}{2\sqrt{x}}$$

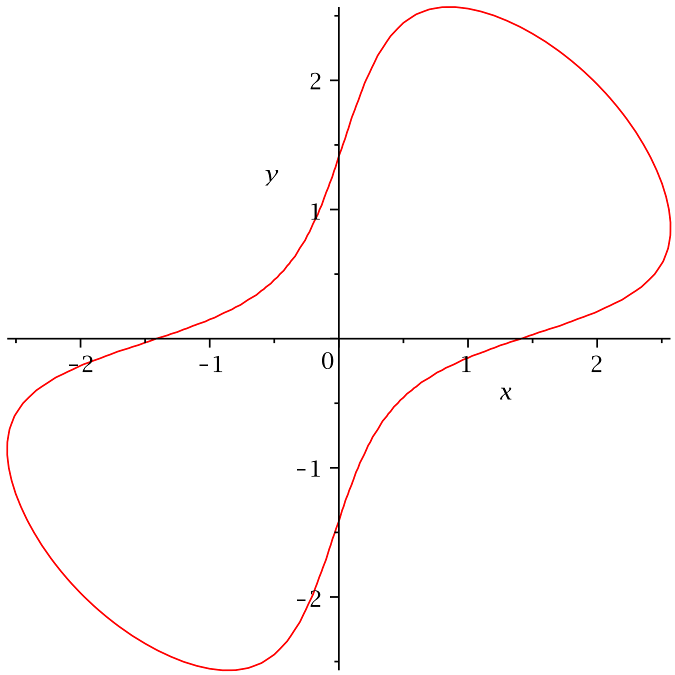
Opgave 3. Met behulp van de substitutieregel

$$\int_{\frac{1}{4}\sqrt{\pi}}^{1} x\cos(x^2)\, dx \;=\; \frac{1}{2}\sin(x^2)\Big|_{\frac{1}{4}\sqrt{\pi}}^{1} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\sin(1) - \sin(\frac{1}{16}\pi)\Big)$$

Met partieel integreren

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)dx \;=\; x\arcsin(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \;=$$
$$\frac{1}{2}\arcsin(\frac{1}{2}) + \sqrt{1 - x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{2}\frac{1}{6}\pi + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \;=\; \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$$

Opgave 4. Zie Figuur 1



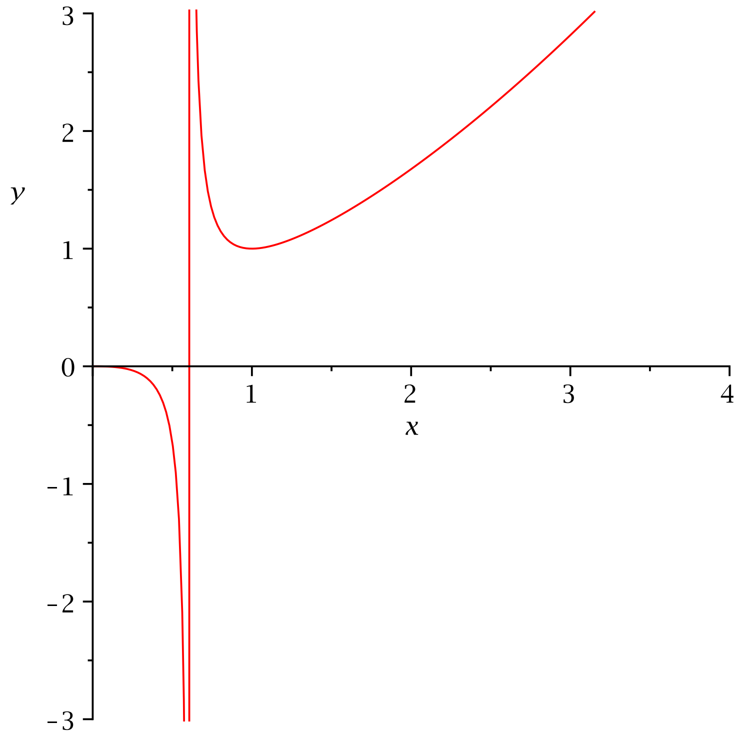
Figuur 1: Plaatje voor opgave 4.

(a) Impliciet differentiëren; we veronderstellen y lokaal als een functie van x:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = -6e^{-xy}(-y - x\frac{dy}{dx})$$
$$\implies (2y - 6xe^{-xy})\frac{dy}{dx} = -2x + 6ye^{-xy}$$
$$\implies \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 6ye^{-xy}}{2y - 6xe^{-xy}}$$

aangenomen dat de noemer niet 0 is (en dan is er een verticale raaklijn). Dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (x_0, y_0) aan de kromme is

$$\frac{-2x_0 + 6y_0e^{-x_0y_0}}{2y_0 - 6x_0e^{-x_0y_0}}$$



Figuur 2: Plaatje voor opgave 5.

(b) In geval $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 0)$ vinden we de richtingscoëfficiënt

$$\frac{-2x_0 + 6y_0 e^{-x_0 y_0}}{2y_0 - 6x_0 e^{-x_0 y_0}} = \frac{-2\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

en de raaklijn wordt $y = \frac{1}{3}(x - \sqrt{2})$ ofwel $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{2}$.

Opgave 5.

(a) Omdat de logarithme alleen voor $x > 0$ gedefinieerd is, moeten we $x > 0$ nemen. Bovendien is de noemer 0 als $1 + 2\ln(x) = 0$ ofwel $\ln(x) = -\frac{1}{2}$ ofwel als $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Het domein is dus $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq e^{-\frac{1}{2}}\}$.

(b) Er is een verticale asymptoot voor $x = e^{-\frac{1}{2}}$; de functie blaast op naar ∞ voor $x \downarrow e^{-\frac{1}{2}}$ en naar $-\infty$ voor $x \uparrow e^{-\frac{1}{2}}$. (De noemer wordt 0 en de teller niet voor $x = e^{-\frac{1}{2}}$.) Voor de horizontale en scheve asymptoot hoeven we alleen naar $x \to \infty$ te beschouwen. Omdat elke macht van x sneller groeit dan $\ln(x)$ geldt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, en er is dus geen horizontale asymptoot. Voor een scheve asymptoot kijken we naar

$$f(x) - ax = \frac{x^2 - ax(1 + 2\ln(x))}{1 + 2\ln(x)}$$

en omdat $\ln(x)$ minder hard groeit dan elke macht van x volgt datvoor $x \to \infty$ dit voor elke $a \in \mathbb{R}$ oneindig is. Er is dus geen scheve asymptoot.

(c)

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{1 + 2\ln(x)} = 0$$

(want teller gaat naar 0 en noemer gaat naar $-\infty$).

(d) De afgeleide is

$$f'(x) = \frac{2x(1 + 2\ln(x)) - x^2(2\frac{1}{x})}{(1 + 2\ln(x))^2} = \frac{4x\ln(x)}{(1 + 2\ln(x))^2}$$

(e) We hebben $f'(x) = 0$ precies dan als $x = 1$ (of als $x = 0$ want $\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 0$). Vanwege de analyse van de asymptoten volgt dat $f(1) = 1$ een lokaal minimum is (dit kan ook worden bepaald door $f''(1) > 0$ te bepalen). Dit is niet globaal. Verder is $f(0) = 0$ een randmaximum, en deze is ook lokaal.

(f) Tweede orde afgeleide

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4\ln(x) + 4)(1 + 2\ln(x))^2 - 8\ln(x)(1 + 2\ln(x))2}{(1 + 2\ln(x))^4} \\ &= \frac{16\ln^3(x) + 4\ln(x) + 4}{(1 + 2\ln(x))^4} \end{aligned}$$

en dan is $f''(x) > 0$ voor $x > 1$. Dan is de functie concaaf naar boven. (Je kunt ook schrijven

$$f''(x) = \frac{(4\ln(x) + 4)(1 + 2\ln(x))^2 - 8\ln(x)(1 + 2\ln(x))2}{(1 + 2\ln(x))^4} = \frac{4(1 - \ln(x) + 2\ln^2(x)}{(1 + 2\ln(x))^3}$$

Opgave 6. Gebruik de logarithme

$$\ln((1 + \frac{x}{n})^n) = n\ln(1 + \frac{x}{n}) = n\big(\ln(1 + \frac{x}{n}) - \ln(1)\big) = x\frac{\ln(1 + \frac{x}{n}) - \ln(1)}{\frac{x}{n}}$$

Dit zien we als een differentiequotiënt, en dus als $n \to \infty$ dan gaat deze term (afgezien van de x) naar de afgeleide van de logarithme in 1, dat is $\frac{1}{1} = 1$. Dus de limiet is x, en aan beide kanten de exponentiële functie nemen geeft

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x.$$

Opgave 7. Antwoord: 7c Veronderstel dat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is en differentieerbaar op (a,b) is, dan bestaat er een $c \in (a,b)$ met $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Opgave 8. (Meerdere oplossingen mogelijk!) Zij x de afstand langs de middenstreep op de weg tot het snijpunt met de verlengde lijn van het bord. Dan is de hoek α tot de rechterpoot gegeven door $\tan(\alpha) = \frac{50}{x}$ en de hoek β tot de linkerpoot gegeven door $\tan(\beta) = \frac{70}{x}$. Dan is

$$\theta = \beta - \alpha = \arctan(\frac{50}{x}) - \arctan(\frac{70}{x})$$

differentiëren en gelijk aan 0 stellen geeft

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1+(\frac{70}{x})^2}\frac{-70}{x^2} - \frac{1}{1+(\frac{50}{x})^2}\frac{-50}{x^2} \\ \Longrightarrow\ & \frac{70}{x^2+70^2} = \frac{50}{x^2+50^2} \\ \Longrightarrow\ & 70(x^2+50^2) = 50(x^2+70^2) \\ \Longrightarrow\ & 20x^2 = 50\cdot 70^2 - 70\cdot 50^2 = 50\cdot 70\cdot 20 \\ \Longrightarrow\ & x^2 = 3500 \implies x = \sqrt{3500} = 10\sqrt{35} \cong 59.16m \end{aligned}$$

NB Het antwoord $-10\sqrt{35}$ is als u eraan voorbij bent gereden, en over uw schouder achteruit kijkt.

Opgave 9.

(a) Omdat de nulpunten in a en b dubbel zijn, volgt dat $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 g(x)$ met g een polynoom. Dan is

$$f'(x) = 2(x-a)(x-b)^2 g(x) + 2(x-a)^2(x-b)g(x) + (x-a)^2(x-b)^2 g'(x)$$

en dus $f'(a) = f'(b) = 0$. Bovendien is $f(a) = f(b)$, en kunnen we (want f een polynoom) de middelwaardestelling op f toepassen, zodat er een $c \in (a,b)$ bestaat met

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Dus f' heeft in ieder geval de nulpunten a, b en c in $[a,b]$.

(b) Dit verandert niets aan de uitspraak (die waar blijft), we kunnen er niets meer van zeggen, neem bijvoorbeeld $f(x) = (x-a)^3(x-b)^3$, dan is

$$f'(x) = 3(x-a)^2(x-b)^2\Big(x - b + x - a\Big)$$

welke als nulpunten a, b en $\frac{1}{2}(a+b)$ heeft.

(c) Merk op dat

$$(x^2 f(x))'' = x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x) \geq 0$$

dus $x \mapsto x^2 f(x)$ is concaaf naar boven. In het bijzonder ligt de verbindingslijn tussen twee punten op de grafiek boven de grafiek. Verbind $(a, f(a) = 0)$ en $(b, f(b) = 0)$, dan is dat de x-as van $[a, b]$. Dus $x^2 f(x) \leq 0$ op $[a, b]$, en dus ook $f(x) \leq 0$ voor $x \in [a, b]$.