Tentamen Calculus 1
28 oktober 2010, 9:00 - 12:00 uur

Je mag geen rekenapparaat gebruiken.

De opgaven 1 t.e.m. 7 tellen allemaal even zwaar. De bonusvraag aan het eind van het tentamen kan extra punten opleveren.

Vermeld op elk papier dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef bij elke opgave niet alleen het antwoord, maar leg ook uit waarom het door jou gegeven antwoord het goede antwoord is.

Veel succes!

1. We definiëren een functie f van het gesloten interval $[0, \sqrt{3}]$ naar $\mathbb{R}$ door:

voor elke x in $[0, \sqrt{3}]$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Laat zien dat f op het gesloten interval $[0, \sqrt{3}]$ een kleinste en een grootste waarde aanneemt. Bereken die kleinste en die grootste waarde en geef punten aan waar de functie f die waarden aanneemt.

Maak een schets van de grafiek van f.

Bereken ook $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$.

2. Maak een schets van de verzameling van alle punten (x, y) in het vlak $\mathbb{R}^2$ die voldoen aan $-2 \leq x \leq 2$ en: $x^2 \leq y \leq 1 + \frac{1}{4}x^2$ of $1 + \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq x^2$.

Noem die verzameling R.

Bereken de oppervlakte van R.

3. We hebben de beschikking over een plaat blik van 400 cm^2. Wat is de grootst mogelijke inhoud van een cylindervormig blikje dat we uit deze plaat zouden kunnen vervaardigen? Wat is bij een blikje met deze maximale inhoud de verhouding tussen de hoogte en de straal van het cirkelvormige grondvlak?

4. We definiëren een functie f van het gesloten interval $[1, 3]$ naar $\mathbb{R}$ door:

voor elke x in $[1, 3]$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

We definiëren ook functies c, d van $[1, 3]$ naar $\mathbb{R}$ door:

voor elke x in $[1,3]$, $c(x) = (x-1)\frac{1}{x} + (3-x)\frac{1}{3}$, en $d(x) = x - 1 + (3-x)\frac{1}{x}$.

Merk op: voor elke x in $[1,3]$, $c(x)$ is een ondersom van f op $[1,3]$ en $d(x)$ is een bovensom van f op $[1,3]$.

Ga na wat de grootste waarde is van de functie c op $[1,3]$ en waar deze wordt aangenomen, en ga ook na wat de kleinste waarde is van de functie d op $[1,3]$ en waar deze wordt aangenomen.

5. We definiëren een functie f van $(0, \frac{1}{2}\pi)$ naar $\mathbb{R}$ door:

voor alle x in $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $f(x) = \tan(x) + \cot(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Maak een schets van de grafiek van de functie f.

Voor welke punten x van $(0, \frac{1}{2}\pi)$ geldt: $f'(x) < 0$?

Laat zien dat f in $(0, \frac{1}{2}\pi)$ een kleinste waarde aanneemt. Wat is deze kleinste waarde en waar neemt f hem aan?

Laat zien dat f in precies twee punten van $(0, \frac{1}{2}\pi)$ de waarde 1000 aanneemt.

6. Bepaal de vierde-graads Taylor-veeltermfunctie van de functie $x \mapsto \ln(1+x)$ in het punt 0.

Noem die functie g_4 en bereken $g_4(\frac{1}{2})$.

Bewijs nu: $\frac{3}{8} < \ln(\frac{3}{2}) < \frac{5}{12}$.

Zoals je weet hebben we gedefinieerd: $\ln(\frac{3}{2}) = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx$.

Bepaal een ondersom c van de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ op het gesloten interval $[1, \frac{3}{2}]$ met de eigenschap: $\frac{3}{8} < c$, bijvoorbeeld door te beginnen het interval $[1, \frac{3}{2}]$ in zes gelijke stukken te verdelen.

7. Bepaal de derde-graads Taylor-veeltermfunctie van de functie $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ in het punt 0.

Noem die functie g_3 en bereken $g_3(1)$.

Bewijs nu: $\frac{5}{4} \leq \sin(1) + \cos(1) \leq \frac{17}{12}$.

bonus-vraag: Ga na of $\sin(1) + \cos(1) = \frac{4}{3}$.

Vergeet niet, in blackboard, de elektronische enquête in te vullen!