Tentamen Calculus 1
29 oktober 2009, 14:00 - 17:00 uur

Je mag geen rekenapparaat gebruiken.

De opgaven 1 t.e.m. 7 tellen allemaal even zwaar.

Een cijfer boven 9 *krijg je alleen als ook de bonusvraag in opgave 7 goed beantwoord is.*

Vermeld op elk papier dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef bij elke opgave niet alleen het antwoord, maar leg ook uit waarom het door jou gegeven antwoord het goede antwoord is.

Veel succes!

1. We definiëren een functie f van het gesloten interval $[\frac{1}{2}, 2]$ naar $\mathbb{R}$ door:

voor elke x in $[\frac{1}{2}, 2]$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Laat zien dat f op het gesloten interval $[\frac{1}{2}, 2]$ een kleinste en een grootste waarde aanneemt. Bereken die kleinste en die grootste waarde en geef punten aan waar de functie f die waarden aanneemt.

Bereken ook $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$.

2. Maak een schets van de verzameling van alle punten (x, y) in het vlak $\mathbb{R}^2$ die voldoen aan $0 \le x$ en $0 \le y$ en $x^2 \le y$ en $y^2 \le x$.

Noem die verzameling R.

Bereken de oppervlakte van R.

3. Maak een schets van de verzameling E die bestaat uit alle punten (x, y) in het vlak $\mathbb{R}^2$ die voldoen aan

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

De verzameling E heet, zoals je wel weet, een *ellips*.

Bepaal een punt (x_0, y_0) op de ellips E zó, dat $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$ en zó, dat de rechthoek gevormd door de punten:

$$(x_0, y_0),\ \ (x_0, -y_0),\ \ (-x_0, -y_0) \text{ en } (-x_0, y_0)$$

een zo groot mogelijke oppervlakte heeft.

Wat is die zo groot mogelijke oppervlakte?

4. We definiëren een functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ door:

voor alle x in $\mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(\frac{1}{2}x)$.

Maak een schets van de grafiek van de functie f.

Bewijs: f is *monotoon-stijgend*, d.w.z.:

voor alle x, y in $\mathbb{R}$, als $x < y$ dan $f(x) < f(y)$.

Bewijs dat er precies één punt x in $\mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap: $f(x) = \frac{1}{2}$.

We noemen dat punt: x_0.

Laat zien: $\frac{1}{4} < x_0 < \frac{1}{2}$.

5. Bepaal de vierde-graads Taylor-veeltermfunctie van de functie $x \mapsto \ln(x)$ in het punt 1.

Noem die functie g_4 en bereken $g_4(2)$.

Bewijs nu: $\ln(2) < \frac{5}{6}$.

Zoals je weet hebben we gedefinieerd: $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Bepaal nu een bovensom d van de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ op het gesloten interval $[1, 2]$ met de eigenschap: $d < \frac{5}{6}$.

6. We hebben een vierkant stuk karton van 3 bij 3 meter.

We willen bij elk van de vier hoekpunten een vierkant wegknippen van x bij x meter en dan uit het restant een doos vormen die van boven open is en hoogte x heeft.

Wat is de grootst mogelijke inhoud van zo'n doos?

7. Bepaal de derde-graads Taylor-veeltermfunctie van de functie $x \mapsto \sin(x)$ in het punt 0.

Noem die functie g_3 en bereken $g_3(1)$.

Bewijs nu: $\frac{3}{4} \leq \sin(1) \leq \frac{7}{8}$.

bonus-vraag: Laat zien dat $\sin(1)$ niet een rationaal getal is.

Antwoorden Oefenopgaven Calculus 1

1. De functie is continu en neemt dus zeker een grootste en een kleinste waarde aan op het gesloten interval $[1,7]$.

Om die punten te vinden bestuderen we de afgeleide functie:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

We zien: $f'(2) = 0$ en 2 is het enige punt in $[1,7]$ waar f' de waarde 0 aanneemt. We weten nu: f neemt zijn grootste en ook zijn kleinste waarde aan in een van de punten 1, 2 of 7.

Bereken: $f(1) = -3$, $f(2) = -8$ en $f(7) = 267$.

Dus: de grootste waarde is 267 en wordt aangenomen in 7 en de kleinste waarde is -8 en wordt aangenomen in 2.

Merk nog op $f''(2) = 0$ en $f'''(2) = 6$. Hieruit volgt: de functie f stijgt in het punt 2.

Tenslotte: $\int_1^7 f(x)dx = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 8x|_1^7 = 360$.

2. We moeten berekenen: $\int_0^\pi x + \sin(x)dx$ - $\int_0^\pi xdx$ + $\int_\pi^{2\pi} xdx$ - $\int_\pi^{2\pi} x + \sin(x)dx = \int_0^\pi \sin(x)dx + \int_\pi^{2\pi} -sin(x)dx = -\cos(x)|_0^\pi + \cos(x)|_\pi^{2\pi} = 2 + 2 = 4$.

3. $AP + PB = f(\theta) = 2\sin(\frac{1}{2}\theta) + 2\sin(\frac{1}{2}(\pi - \theta)) = 2(\sin(\frac{1}{2}\theta) + cos(\frac{1}{2}\theta))$.

Merk op: $f'(\theta) = \cos(\frac{1}{2}\theta) - \sin(\frac{1}{2}\theta)$.

Dus: $f'(\frac{1}{2}\pi) = 0$ en $f''(\frac{1}{2}\pi) < 0$, d.w.z. f heeft op het interval $[0,\pi]$ een locaal maximum in $\frac{1}{2}\pi$. Dit is ook het enige kritische punt van f in $[0, 2\pi]$ en we zien: $f(\frac{1}{2}\pi > f(0) = f(\pi)$. dus f neemt zijn maximum $2\sqrt{2}$ aan in $\frac{1}{2}\pi$.

4. Merk op: voor elke x in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $f'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2} - 1 \geq 0$. Voor alle x, y in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, als $x < y$, dan bestaat z zó dat $x < z < y$ en $f'(z) > 0$, en dus: $f(x) < f(y)$. Dus: f is monotoon-stijgend op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Voor elke $\delta > 0$ geldt: $\sin(\delta) \leq \delta$ want: $\sin(0) = 0$, en voor elke $x \geq 0$, $\sin'(x) = \cos(x) \leq 1$.

Dus: voor elke δ, als $0 < \delta < \frac{1}{3}\pi$, dan $\tan(\frac{1}{2}\pi - \delta) = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\cos(\frac{1}{2}\pi - \delta)} = \frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} > \frac{\cos(\frac{1}{3}\pi)}{\sin(\delta)} > \frac{1}{2\delta}$.

Dus: $\tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{100}) > 50$, dus $f(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{100}) > 10$ en $f(0) = 0$. Er bestaat dus, omdat de functie $x \mapsto \tan(x) - x$ continu is, vanwege de tussenwaardestelling, een punt x zó dat $f(x) = 10$ en $0 < x < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{100}$. Er kan maar een zo'n punt zijn omdat f monotoon stijgt.

5. $g_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$.
$g_4(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{384} = \frac{95}{384}$.
$|g_4(\frac{1}{4} - \sin(\frac{1}{4})| \leq \frac{1}{120}(\frac{1}{4})^5 = \frac{1}{120 \cdot 1024} < \frac{1}{(10)^5}$.
Rechtvaardiging hiervan: Citeer de stelling van Taylor en merk op: voor alle x in $[0, \frac{1}{4}]$, $|\sin^{(5)}(x)| \leq 1$.

6. Voor elke $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ en $f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$.
Dus: $f(225) = 15$, $f'(225) = \frac{1}{30}$, $f''(225) = -\frac{1}{4\cdot(15)^3}$ en $f'''(225) = \frac{3}{8\cdot(15)^5}$.
Dus: $g_1(x) = f(225) + \frac{1}{30}(x - 225)$ en $g_1(240) = 15\frac{1}{2}$.
Ook: $g_2(x) = g_1(x) - \frac{1}{8\cdot(15)^3}(x - 225)^2$ en $g_2(240) = 15\frac{1}{2} - \frac{1}{120}$.
Ook: $|\sqrt{240} - g_1(240)| = |f(240) - g_1(240)| \leq \frac{f''(225)}{2} \cdot (240 - 225)^2 = \frac{1}{120}$, want, voor elke x in $[225, 240]$, $|f''(x)| \leq |f''(225)|$.
En: $|\sqrt{240} - g_2(240)| = |f(240) - g_2(240)| \leq \frac{f'''(225)}{6} \cdot (240 - 225)^3 = \frac{1}{3600}$, want, voor elke x in $[225, 240]$, $|f'''(x)| \leq |f'''(225)|$.

7. $\int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{10} = \frac{9}{10}$.
Merk op: $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} > \frac{45}{100}$, dus $c = (2-1) \cdot f(2) + (3-2) \cdot f(3) + (4-3) \cdot f(4) + (5-4) \cdot f(5) + (6-5) \cdot f(6) + (10-6) \cdot f(10)$ voldoet.