Radboud Universiteit

Tentamen Calculus A NWI-WP025
25 januari 2018, 8.30–11.30

---

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.
In geval uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ komt u in aanmerking voor de bonusregeling.

---

1. (a) Zij $w = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$. Bepaal $w^2$, de modulus $|w|$ en argument $\arg(w)$.
   (b) Bepaal de nulpunten van $z^7 = 128w$ met $w$ als in (a).

2. Beschouw de functie $f(x) = x^2 \exp(-x^3) = x^2 e^{-x^3}$ op het domein $D = [-1, \infty)$.
   (a) Bepaal de afgeleide $f'$ en tweede afgeleide $f''$.
   (b) Geef een schets van de grafiek van $f$ (inclusief mogelijke asymptoten, maxima/minima). Bepaal het bereik van $f$.
   (c) Is de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} f(x)\,dx$ convergent of divergent?
   (d) Laat zien dat $f$ beperkt tot het domein $[0, \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}]$ inverteerbaar is. Bepaal de waarde $y_0 = f(\frac{1}{6}\sqrt[3]{18})$ en bereken de afgeleide van de inverse functie $f^{-1}$ in $y_0$.

3. Bepaal de convergentie-eigenschappen (absoluut convergent, voorwaardelijk convergent, divergent) van de volgende reeksen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n} + 9n\sqrt[3]{n} + 14}{n^3\sqrt[3]{n} + 4n^2 + 10}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

4. Beschouw de machtreeks $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n}$.
   (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.
   (b) Bepaal het convergentiegedrag van de reeks in de randpunten van het convergentie-interval.
   (c) Laat zien dat de machtreeks $y(x)$ voldoet aan $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = -4xy(x)$ met $y(0) = 1$.
   (d) Los deze differentiaalvergelijking op om de functie die deze machtreeksontwikkeling heeft te bepalen.

!!ZOZ Op de achterkant staan ook nog opgaven ZOZ!!

5. (a) Bepaal de oplossing van $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \sin(\sin(x))\cos(x)$ met $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Bepaal de algemene oplossing van $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^3$.

6. De juiste formulering van de middelwaardestelling is:[1]

(a) als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu, dan neemt $f$ elke waarde aan tussen $f(a)$ en $f(b)$;
(b) als $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, dan dan geldt dat er $c \in (a,b)$ bestaat met $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;
(c) als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en $f$ differentieerbaar op $(a,b)$, dan geldt dat er $c \in (a,b)$ bestaat met $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;
(d) als $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, dan neemt $f$ elke waarde aan tussen $f(a)$ en $f(b)$.

7. Bepaal de algemene oplossing van $y'' + 4y' - 4y = 24xe^{2x}$.

8. Beschouw de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n$ met $n \in \mathbb{N}$ en $n \neq 0$, $n \neq 1$ en $f$ en $g$ gegeven functies, en $y$ de onbekende functie. Merk op dat $y(x) = 0$ voor alle $x$ een oplossing is, en de oplossing $y(x) = 0$ voor alle $x$ is de triviale oplossing.

   (a) Laat zien dat door de substitutie $h(x) = \big(y(x)\big)^{1-n}$ voor een niet-triviale oplossing $y$ deze differentiaalvergelijking overgaat in een lineaire eerste orde differentiaalvergelijking voor $h$.

   (b) Bepaal de algemene oplossing van $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -e^{ax}y^2$ voor $x > 0$. Hier is $a$ een reële constante ongelijk aan 0.

   (c) Voor welke waarden van $a$ (met $a \neq 0$) geldt dat voor elke oplossing van de differentiaalvergelijking uit (b) de $\lim_{x\to\infty} y(x)$ bestaat?

| **Normering** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Gratis | Totaal |
| Punten | 10 | 14 | 10 | 14 | 12 | 6 | 14 | 10 | 10 | 100 |

Als het onafgeronde tentamencijfer $T \geq 5.0$, waarbij $T$ het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10 is, en uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$, dan is het eindcijfer $E$ gelijk aan het $\max(T, 0.8T + 0.2H)$. Als u niet aan deze voorwaarden voldoet, dan $E = T$. Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van $E$ naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5).

[1] Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek. Alleen het antwoord van deze opgave telt.

## Uitwerkingen en hints

### Opgave 1.

(a) We berekenen

$$w^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = i$$

Bovendien is $|w| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, en omdat $\Re w = \Im w$ volgt dat $\arg(w) = \frac{1}{4}\pi$ (als $\Re w > 0$) en $\arg(w) = \frac{3}{4}\pi$ (als $\Re w < 0$). Omdat $\Re w = \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ volgt dat $\arg(w) = \frac{1}{4}\pi$.

Nu kunnen we ook $w^2 = |w|^2 e^{2i\arg(w)} = 1^2 e^{i\frac{1}{2}\pi} = e^{i\frac{1}{2}\pi} = i$ (als alternatief).

(b) Schrijf eerst $w = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i = e^{i\frac{1}{4}\pi}$. Merk op dat $128 = 2^7$, dus we moeten oplossen $z^7 = 2^7 e^{i\frac{1}{4}\pi}$. Stel $z = re^{i\phi}$ en dus $z = r^7 e^{i7\phi}$ dan krijgen we de vergelijking

$$\begin{cases} r^7 = 2^7 \\ 7\phi = \frac{1}{4}\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r = 2 \\ \phi = \frac{1}{28}\pi + k\frac{2}{7}\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

en we vinden 7 oplossingen

$$z_k = 2\exp(i(\frac{1}{28}\pi + k\frac{2}{7}\pi)), \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

### Opgave 2.

(a) Een keer differentiëren geeft mbv de produkt- en kettingregel

$$f'(x) = 2xe^{-x^3} + x^2(-3x^2)e^{-x^3} = (2x - 3x^4)e^{-x^3} = x(2 - 3x^3)e^{-x^3}$$

en nogmaals differentiëren geeft

$$f''(x) = (2 - 12x^3)e^{-x^3} + (2x - 3x^4)(-3x^2)e^{-x^3} = (2 - 18x^3 + 9x^6)e^{-x^3}$$

(b) Aangezien het $D = [-1, \infty)$, en $f$ continu is op het gehele domein, zijn er geen verticale asymptoten. Merk op dat $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^3} = 0$, en dus is er een horizontale asymptoot $y = 0$.

Voor de maxima en minima hoeven we alleen te kijken naar kritieke punten en het randpunt $x = -1$. Nu geldt $f'(x) = 0$ dan en slechts dan als $x = 0$ of $2 - 3x^3 = 0$ (ofwel $x = \sqrt[3]{2/3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$). Merk op dat beide punten in het domein liggen.

Omdat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in D$ en $f(0) = 0$ volgt dat $f(0) = 0$ een globaal minimum is voor $x = 0$. Merk op dat $f'(x) > 0$ voor $x \in [-1, 0)$ en voor $x > \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$ en dat $f'(x) \leq 0$ voor $x \in (0, \frac{1}{3}\sqrt[3]{18})$. Dus $f$ heeft een lokaal maximum $f(\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}) = \frac{1}{9}\sqrt[3]{18^2}e^{-2/3} =$

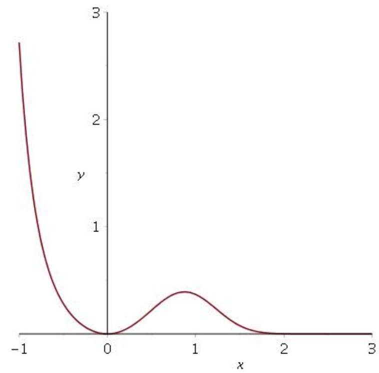


Figure 1: Plot van $f$ voor opgave 2.

$\frac{1}{3}\sqrt[3]{12}e^{-2/3}$ voor $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$. Merk op dat deze waarde kleiner is dan $f(-1) = e$, en dus is het maximum in $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$ lokaal en niet globaal. Merk verder op dat, vanwege het gedrag van $f'$, $f$ voor $x = -1$ een randmaximum heeft, en vanwege bovenstaande is het randmaximum globaal.

Uit bovenstaande volgt dat het bereik van $f$ gelijk is aan $[0, f(-1)] = [0, e]$.

(c) Merk op dat

$$\int_{-1}^{R} f(x)\,dx = \int_{-1}^{R} x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-x^3}\Big|_{-1}^{R} = -\frac{1}{3}e^{-R^3} + \frac{1}{3}e$$

en dus bestaat de

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-1}^{R} x^2 e^{-x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{3}e^{-R^3} + \frac{1}{3}e = \frac{1}{3}e$$

en is de oneigenlijke $\int_{-1}^{R} f(x)\,dx$ convergent (en de waarde van de convergente integraal is $\frac{1}{3}e$).

(d) We weten dat $f$ beperkt tot het open interval $(0, \frac{1}{3}\sqrt[3]{18})$ strikt positieve afgeleide heeft, en dus is $f$ op $[0, \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}]$ strikt stijgend. In het bijzonder is $f$ beperkt tot $[0, \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}]$ injectief en heeft daar een inverse $f^{-1}$. Merk op dat $y_0 = f(\frac{1}{6}\sqrt[3]{18}) = \frac{1}{36}\sqrt[3]{18^2} = \frac{1}{12}\frac{[}{3}]12$. Om nu de afgeleide van de inverse functie $f^{-1}$ in $y_0$ te berekenen, differentiëren we

$$x = f^{-1}(f(x)) \implies 1 = \frac{df^{-1}}{dx}(f(x)) \cdot f'(x) \implies \frac{df^{-1}}{dx}(y_0) = \frac{1}{f'(\frac{1}{6}\sqrt[3]{18})}$$

$$\frac{df^{-1}}{dx}(y_0) = \frac{\exp(18/6^3)}{\frac{1}{6}\sqrt[3]{18}(2 - 18/6^3)} = \frac{\exp(1/24)}{\frac{1}{6}\sqrt[3]{18}(2 - 1/24)}$$

(en dat zou verder vereenvoudigd kunnen worden).

**Opgave 3.**

Voor de eerste reeks gebruiken we het vergelijkingskenmerk, en we vergelijken door middel van

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n^2\sqrt{n}+9n\sqrt[3]{n}+14}{n^3\sqrt[3]{n}+4n^2+10}\right|}{\left|\frac{n^2\sqrt{n}}{n^3\sqrt[3]{n}}\right|} = 1$$

en merk op dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n}}{n^3\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$, en dit is een divergente reeks (want $p = \frac{5}{6} < 1$). Aangezien de reeks alleen positieve termen bevat vinden we dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n}+9n\sqrt[3]{n}+14}{n^3\sqrt[3]{n}+4n^2+10}$ divergent is.

Voor de laatste reeks gebruiken we het wortelkenmerk

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = 1$$

dus geeft het wortelkenmerk geen uitspraak. We weten dat $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ en dus zien we dat

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

en omdat de termen niet naar nul convergeren, is de reeks divergent.

**Opgave 4.**

(a) We gebruiken het quotiëntenkenmerk;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}(n+2)x^{2(n+1)}\right|}{|(-1)^n(n+1)x^{2n}|} = \lim_{n\to\infty}|x|^2\frac{n+2}{n+1} = |x|^2\frac{1+2/n}{1+1/n} = |x|^2$$

dus als $|x|^2 < 1$ dan is de reeks absoluut convergent en als $|x|^2 > 1$ dan is de reeks divergent. Dus $|x|^2 < 1$ ofwel $|x| < 1$ voor absolute convergentie, en dus is de convergentiestraal $R = 1$.

(b) Voor $x = \pm 1$ vinden we dezelfde uitdrukking

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$$

en deze reeks is divergent wat $\lim_{n\to\infty}(-1)^n(n+1) \neq 0$. Dus divergent in beide randpunten $\pm 1$.

(c) Het is duidelijk dat $y(0) = 1$, want 0 is het centrum van de machtreeks.

Voor de differentiaalvergelijking schrijven we

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)\frac{dy}{dx} &= (1+x^2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(n+1)x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(n+1)x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(n+1)x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(n+1)x^{2n-1} + \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1} 2(m-1)mx^{2m-1} \\
&= -4x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 2n(n+1)x^{2n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} 2(n-1)nx^{2n-1} \\
&= -4x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \Big(2n(n+1) - 2(n-1)n\Big)x^{2n-1} \\
&= -4x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 4nx^{2n-1} = -4x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} 4(n+1)x^{2n+1} \\
&= -4x(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (n+1)x^{2n}) = -4x\,y(x)
\end{aligned}
$$

Er zijn meerdere manieren om te laten zien dat $y$ een oplossing is van deze differentiaalvergelijking.

(d) De differentiaalvergelijking $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = -4x\,y$ is separabel;

$$
\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-4x}{1+x^2}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -2\ln(1+x^2) + C = \ln(1+x^2)^{-2} + C
$$

$$
\Longrightarrow \quad y(x) = C\frac{1}{(1+x^2)^2}
$$

en met $y(0) = 1$, vinden we $C = 1$, ofwel $y(x) = (1+x^2)^{-2}$.

**Opgave 5.**

(a) Dit is een separabele differentiaalvergelijking, en we kunnen de integraal naar $x$ met de substitutieregel (met $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$) bepalen;

$$
\frac{dy}{dx} = y^2\sin(\sin(x))\cos(x) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \sin(\sin(x))\cos(x)\,dx \quad \Longrightarrow
$$

$$
\frac{-1}{y} = \int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C = -\cos(\sin(x)) + C \quad \Longrightarrow
$$

$$
y(x) = \frac{1}{C + \cos(\sin(x))}
$$

Dan is $y(0) = \frac{1}{C+1} = \frac{1}{2}$ ofwel $C = 1$. We vinden de oplossing

$$y(x) = \frac{1}{1 + \cos(\sin(x))}$$

(b) We proberen een integrerende factor te vinden, dus we zoeken de functie $I$ zodanig dat

$$I\frac{dy}{dx} + 2xyI = \frac{d}{dx}\Big(Iy\Big) = I\frac{dy}{dx} + \frac{dI}{dx}y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dx} = 2xI \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dI}{I} = \int 2xdx$$
$$\Longrightarrow \quad \ln I = x^2 \quad \Longrightarrow \quad I = e^{x^2}$$

Als we de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} + 2e^x y = e^x$ vermenigvuldigen met $I(x) = e^{x^2}$ dan krijgen we

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}e^x y = \frac{d}{dx}\Big(e^{x^2}y\Big) = x^3e^{x^2}$$
$$\Longrightarrow \quad e^{x^2}y(x) = \int x^3e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int ue^u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\big(ue^u - \int e^u du\big) = \frac{1}{2}e^u(u-1) + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$$

door de substitutie $u = x^2$, $du = 2xdx$. Dus we vinden de algemene oplossing

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$$

(Alternatief: eerst de bijbehorende homogene lineaire differentiaalvergelijking oplossen, en dan met variatie van constantes de oplossing vinden.)

**Opgave 6.** Antwoord **C**, zie Mean Value Theorem, Theorem 11, p.137, §2.8 van Essex and Adams.

**Opgave 7.** Om de differentiaalvergelijking $y'' + 4y' - 4y = 50xe^{2x}$ op te lossen, bekijken we eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking $y'' + 4y' - 4y = 0$. Deze heeft als karakteristieke vergelijking

$$r^2 + 4r - 4 = (r+2)^2 - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = -2 \pm \sqrt{8} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

en de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $y'' + 4y' - 4y = 0$ is

$$y(x) = C_1e^{(-2+2\sqrt{2})x} + C_2e^{(-2-2\sqrt{2})x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Omdat de aandrijfterm $24xe^{2x}$ in de inhomogene differentiaalvergelijking géén oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking proberen we als particuliere oplossing

$$y_p(x) = (Ax + B)e^{2x}$$
$$y_p'(x) = 2(Ax+B)e^{2x} + Ae^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$$
$$y_p''(x) = 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} + 2Ae^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$$

Invullen geeft

$$24xe^{2x} = y_p'' + 4y_p' - 4y_p = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x} + 4(2Ax + A + 2B)e^{2x} - 4(Ax + B)e^{2x}$$
$$= \big(8Ax + 8A + 8B\big)e^{2x}$$

dus $8A = 24$ en $8A + 8B = 0$, zodat $A = 3$, $B = -3$. Dan is de algemene oplossing gegeven door

$$y(x) = 3(x-1)e^{2x} + C_1 e^{(-2+2\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-2-2\sqrt{2})x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**Opgave 8.**

(a) Pas de kettingregel toe, en vul in dat $y$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking;

$$\frac{dh}{dx}(x) = (1-n)\big(y(x)\big)^{-n}\frac{dy}{dx}(x) = (1-n)\big(y(x)\big)^{-n}\Big(g(x)\big(y(x)\big)^n - f(x)y(x)\Big) =$$
$$(1-n)g(x) - (1-n)f(x)\big(y(x)\big)^{1-n} = (1-n)g(x) - (1-n)h(x)$$

dus $h$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dh}{dx}(x) + (1-n)h(x) = (1-n)g(x)$$

en dat is een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking voor $h$.

(b) Om $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -e^{ax}y^2$ op te lossen, nemen we $n = 2$. We stellen $h(x) = y(x)^{-1}$ (voor een niet-triviale oplossing $y$). Dan voldoet $h$ aan

$$\frac{dh}{dx} + \frac{1}{x}h = e^{ax}$$

en daarvoor zoeken we een integrerende factor $I$; dan $\frac{dI}{dx} = I\frac{1}{x}$ en dus

$$\int \frac{dI}{I} = \int \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad I(x) = x$$

Dus we vinden

$$\frac{d}{dx}\Big(xh(x)\Big) = x\frac{dh}{dx}(x) + h(x) = xe^{ax} \quad \Longrightarrow$$
$$xh(x) = \int xe^a x\, dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\, dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C = \frac{1}{a}e^{ax}(x - \frac{1}{a}) + C \quad \Longrightarrow$$
$$h(x) = \frac{1}{a}e^{ax}(1 - \frac{1}{ax}) + \frac{C}{x} \quad \Longrightarrow$$
$$y(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\frac{1}{a}e^{ax}(1 - \frac{1}{ax}) + \frac{C}{x}} = \frac{a^2x}{e^{ax}(ax-1) + a^2C}$$

(c) Uit (b) weten we de oplossing. Merk op dat als $a > 0$, dan is de breuk die oplossing $y(x) = \frac{a^2 x}{e^{ax}(ax-1)+a^2 C}$ geeft de exponentiële functie dominant. Dus onafhankelijk van de waarde voor $C$ geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Als $a < 0$, dan gaat de exponentiële functie snel naar 0, dus dan groeit de teller sneller dan de noemer. Als $C > 0$ dan geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$, en als $C < 0$ dan geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$, en als $C = 0$ dan geldt ook $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$. Kortom, dan bestaat de limiet niet.

Dus als $a > 0$ dan bestaat voor elke $C$ de limiet en $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ voor elke oplossing $y$ van de differentiaalvergelijking uit (b).