Radboud Universiteit

Tentamen Calculus A NWI-WP025
2 november 2017, 15.45–18.45

---

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.
In geval uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ komt u in aanmerking voor de bonusregeling.

---

1. Gegeven is het polynoom $P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 5$ met $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Laat zien dat $z = i$ een nulpunt is van $P$, ofwel dat $P(i) = 0$.
   (b) Bepaal alle nulpunten (in de complexe getallen $\mathbb{C}$) van $P$.

2. Beschouw de functie $f(x) = \ln(x^2 \exp(x)) = \ln(x^2 e^x)$.
   (a) Bepaal het domein van $f$, de afgeleide $f'$ en tweede afgeleide $f''$.
   (b) Laat zien dat $f$ precies één nulpunt heeft in het interval $[\frac{1}{2}, 1]$. (*Hint.* $e \approx 2.718281$.)
   (c) Geef een schets van de grafiek van $f$ (inclusief mogelijke asymptoten, maxima/minima, buigpunten).
   (d) Bepaal het derdegraads Taylorpolynoom van een primitieve van $f$ rond $-2$.

3. Beschouw de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n x^{2n+1}}{n}$.
   (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.
   (b) Bepaal het convergentiegedrag van de reeks in de randpunten van het convergentie-interval.
   (c) Bepaal de functie die deze machtreeksontwikkeling heeft.

4. (a) Bepaal de oplossing van $y(x) = 1 + \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} t y(t)(1 + y(t))\, dt$.
   (b) Bepaal de oplossing van $\dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = e^{2x}$.

!!ZOZ Op de achterkant staan ook nog opgaven ZOZ!!

5. Welke Taylorexpansie rond 0 is correct voor $f(x) = \sin(x^2)\cos(x^2)$?[1]
   (a) $x^2 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{16}{15}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$; (c) $x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{16}{15}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$;
   (b) $x^2 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{15}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$; (d) $x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{15}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$.

6. Bepaal de oplossing van $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\cos(x)$.

7. De differentiaalvergelijking $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\dfrac{3}{2} - x)\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ heeft $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ als oplossing.
   (a) Leid een recurrente betrekking af voor de coëfficiënten $a_n$.
   (b) Wat is de convergentiestraal van deze oplossing(en)?
   (c) Wat is de dimensie van de ruimte van machtreeksoplossingen van deze differentiaalvergelijking?

8. (a) Bepaal de Taylorontwikkeling rond 0 van $f(x) = \arcsin(x)$. (*Hint.* Gebruik de binomiaalstelling voor een Taylorreeks van $f'$.)
   (b) Substitueer $x = \sin(t)$ in (a) om $t$ te schrijven in een reeks waarin de termen machten van $\sin(t)$ zijn. U mag aannemen dat u beide kanten termsgewijs mag integreren. Laat zien dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2$ door beide zijden te integreren over $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Hierbij mag u gebruiken dat $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} t\, dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}$ voor $n = 1, 2, 3 \cdots$ en waarde 1 voor $n = 0$.
   (c) Bewijs dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$.
   (d) **BONUS**[2] Bewijs de integraal van (b). (*Hint.* Inductie en partiële integratie.)

| **Normering** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Gratis | Totaal |
| Punten | 10 | 15 | 10 | 14 | 6 | 15 | 10 | 10 | 10 | 100 |

Als het onafgeronde tentamencijfer $T \geq 5.0$, waarbij $T$ het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10 is, en uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$, dan is het eindcijfer $E$ gelijk aan het $\max(T, 0.8T + 0.2H)$. Als u niet aan deze voorwaarden voldoet, dan $E = T$. Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van $E$ naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5).

[1] Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek. Alleen het antwoord van deze opgave telt.

[2] Hier kunt u 5 punten *extra* verdienen.

**Uitwerkingen en hints**

**Opgave 1.**

(a) We controleren dat

$$P(i) = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 5 = 1 - 4i - 6 + 4i + 5 = 0$$

(b) Omdat het polynoom $P$ reële coëfficiënten heeft, volgt dat $\bar{i} = -i$ ook een nulpunt van $P$ is. In het bijzonder volgt dat $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$ een factor is in het polynoom $P$ is. Delen we deze factor uit, dan vinden we

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 5 = (z^2 + 1)(z^2 + 4z + 5)$$

Rest nog op te lossen

$$0 = z^2 + 4z + 5 = (z+2)^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad z + 2 = \pm i \quad \Longrightarrow \quad z = -2 \pm i$$

We vinden dus 4 nulpunten, nl. $i$, $-i$, $2+i$, $2-i$, net zoveel als de graad van het polynoom volgens de hoofdstelling van de algebra.

**Opgave 2.**

(a) Het domein van ln is $(0, \infty)$, en merk op dat $x^2 e^x \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dat $x^2 e^x = 0$ dan en slechts dan als $x = 0$. Dus het domein $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Een keer differentiëren geeft (mbv de kettingregel en produktregel)

$$f'(x) = \frac{2xe^x + x^2 e^x}{x^2 e^x} = \frac{2x + x^2}{x^2} = 1 + \frac{2}{x}$$

en nogmaals differentiëren geeft

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2}$$

Merk op dat $f'$ en $f''$ hetzelfde domein hebben als $f$.

(b) Merk op dat $f$ beperkt tot $[-\frac{1}{2}, 1]$ een continue functie is, en dat geldt

$$f(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{4} e^{1/2}) = \ln(\frac{1}{4}) + \ln(e^{1/2}) = -\ln(4) + \frac{1}{2} < 0$$

want $4 > e > \sqrt{e}$. Anderzijds geldt $f(1) = \ln(e) = 1 > 0$. Volgens de tussenwaardestelling neemt $f$ alle waarden aan tussen $-\ln(4) + \frac{1}{2}$ en 1 op het interval $[\frac{1}{2}, 1]$. In het bijzonder bestaat er een $c \in [\frac{1}{2}, 1]$ met $f(c) = 0$. Omdat de afgeleide strikt positief is op dit interval, volgt dat $f$ strikt monotoon stijgend is, en dus is er hoogstens één nulpunt van $f$ op $[\frac{1}{2}, 1]$. Dus er is precies één nulpunt van $f$ in $[\frac{1}{2}, 1]$.

(c) Merk op dat

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln(x^2 e^x) = -\infty = \lim_{x \uparrow 0} \ln(x^2 e^x)$$

zodat $x = 0$ een verticale asymptoot is. Door herschrijven zien we dat

$$\ln(x^2 e^x) = 2\ln(|x|) + x$$

en dus is er geen horizontale (of scheve) asymptoot voor $x \to \infty$. Ook is er geen horizontale (of scheve) asymptoot voor $x \to -\infty$, omdat de logaritme veel langzamer groeit dan $x$ (en zelfs elke positieve macht van $x$). We vinden

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x^2 e^x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 e^x) = -\infty.$$

Voor de kritische punten hoeven we alleen $f'(x) = 0$ op te lossen, ofwel $\frac{2}{x} = -1$ en dus $x = -2$. Dan is $f'(x) > 0$ voor $x \in (\infty, -2)$, $f'(x) < 0$ voor $x \in (-2, 0)$ en $f'(x) > 0$ voor $x > 0$. Dus dan heeft $f$ een lokaal maximum $f(-2) = \ln(4e^{-2}) = \ln(4) - 2 < 0$, en vanwege bovenstaande limieten is dit maximum lokaal en niet globaal. Bovendien volgt dat er geen andere nulpunten zijn dan het nulpunt bij (b).

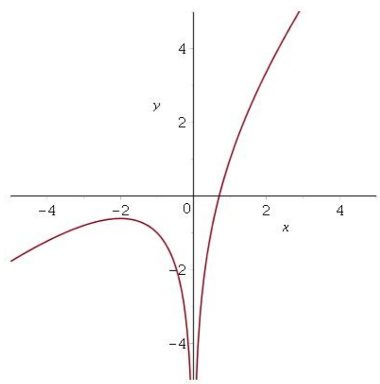


Figure 1: Plot van $f$ voor opgave 2.

(d) We weten dat $f'(-2) = 0$ en $f''(-2) = -\frac{1}{2}$, en dus is het tweedegraads Taylorpolynoom van $f$ rond het centrum $-2$ gelijk aan

$$\ln(4e^{-2}) + 0 \cdot (x+2) + \frac{-\frac{1}{2}}{2!}(x+2)^2$$

en door te integreren over $[-2, x]$ krijgen we het Taylorpolynoom van de (geschikt gekozen) primitieve $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$; ofwel

$$\ln(4e^{-2})(x+2) + \frac{-\frac{1}{2}}{3!}(x+2)^3$$

**Opgave 3.**

(a) We gebruiken het quotiëntenkenmerk;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}9^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n 9^n x^{2n+1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} 9|x|^2 \frac{n}{n+1} = 9|x|^2 \frac{1}{1+1/n} = 9|x|^2$$

dus als $9|x|^2 < 1$ dan is de reeks absoluut convergent en als $9|x|^2 > 1$ dan is de reeks divergent. Dus $|x|^2 < \frac{1}{9}$ ofwel $|x| < \frac{1}{3}$ voor absolute convergentie, en dus is de convergentiestraal $R = \frac{1}{3}$.

(b) Voor $x = -\frac{1}{3}$ vinden we

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n (-\frac{1}{3})^{2n+1}}{n} = -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Deze reeks is niet absoluut convergent, want dat is de divergente harmonische reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (ofwel een $p$-reeks met $p = 1$, gebruik integraalkenmerk). Omdat de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegeven door de positieve getallen $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$ voldoet aan (1) dalend (want $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$) en (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, volgt met het alternerende reekskenmerk dat de alternerende reeks convergent is, en dus voorwaardelijk convergent voor $x = -\frac{1}{3}$.

Voor $x = \frac{1}{3}$ vinden we

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n (\frac{1}{3})^{2n+1}}{n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

en de convergentie-eigenschappen zijn hetzelfde. Kortom, in beide randpunten is de reeks voorwaardelijk convergent.

(c) Het gemakkelijkst is te zien dat de reeks lijkt op die van de logaritme;

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^n}{n}, \qquad |y| < 1$$

en vervang $y = 9x^2$ om te krijgen

$$\ln(1+9x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9^n x^{2n}}{n}$$

en vermenigvuldig met $-x$, zodat

$$-x \, \ln(1+9x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n x^{2n+1}}{n}$$

**Opgave 4.**

(a) Merk op $y(\frac{1}{2}) = 1$. Differentieer naar $x$, gebruik makend van de hoofdstelling van de calculus, zodat we een separabele differentiaalvergelijking krijgen;

$$y' = xy(1+y) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(1+y)} = \int x\,dx$$

Gebruik breuksplitsing;

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} + \frac{-1}{1+y} \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| - \ln|1+y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

ofwel $\ln\frac{|y|}{|1+y|} = \frac{1}{2}x^2 + C$, en dus vinden we $\frac{|y|}{|1+y|} = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ (waarbij $C$ een generiek constante is). Omdat we de beginvoorwaarde $y(\frac{1}{2}) = 1$ volgt dat we $y$ positief (in een omgeving van $x = \frac{1}{2}$) moeten nemen met

$$\frac{1}{2} = Ce^{\frac{1}{8}} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{e^{-1/8}}{2}$$

en we kunnen de oplossing expliciet bepalen, want

$$y(x) = (1+y(x))Ce^{\frac{1}{2}x^2} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{Ce^{\frac{1}{2}x^2}}{1-Ce^{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}}}{2-e^{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}}}$$

(b) We proberen een integrerende factor te vinden, dus we zoeken de functie $I$ zodanig dat

$$I\frac{dy}{dx} + 2e^x yI = \frac{d}{dx}\Big(Iy\Big) = I\frac{dy}{dx} + \frac{dI}{dx}y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dx} = 2e^x I \quad \Longrightarrow \quad \int\frac{dI}{I} = \int 2e^x dx$$
$$\Longrightarrow \quad \ln I = 2e^x \quad \Longrightarrow \quad I = e^{2e^x} = \exp(2\exp(x))$$

Als we de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} + 2e^x y = e^x$ vermenigvuldigen met $I$ dan krijgen we

$$e^{2e^x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2e^x}e^x y = \frac{d}{dx}\Big(e^{2e^x}y\Big) = e^{2x}e^{2e^x}$$
$$\Longrightarrow \quad e^{2e^x}y(x) = \int e^{2x}e^{2e^x}\,dx = \int \frac{1}{4}te^t\,dt = \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}\int e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{4}e^t(t-1) + C = \frac{1}{4}e^{2e^x}(2e^x - 1) + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4} + Ce^{-2e^x}$$

met de substitutie $t = 2e^x$, $\frac{1}{2}dt = e^x\,dx$ in de integraal en vervolgens partieel integreren.

(Alternatief: eerst de bijbehorende homogene lineaire differentiaalvergelijking oplossen, en dan met variatie van constantes de oplossing vinden.)

**Opgave 5.** Er zijn meerdere mogelijkheden. U kunt bijvoorbeeld in de standaard Taylorreeksen voor de sin en cos rond 0 eerst $x$ vervangen door $x^2$ en dan een aantal termen uitvermenigvuldigen. Als alternatief kunt opmerken dat $\sin(x^2)\cos(x^2) = \frac{1}{2}\sin(2x^2)$ en dan heeft u voldoende aan de Taylorreeks voor sin rond $x = 0$; in beide gevallen vinden we

$$x^2 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{15}x^{10} - \frac{4}{315}x^{14} + \mathcal{O}(x^{18})$$

dus antwoord **B**.

**Opgave 6.** Om de differentiaalvergelijking $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\cos(x)$ op te lossen, bekijken we eerst de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking $y'' + 2y' + 2y = 0$. Deze heeft als karakteristieke vergelijking

$$r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = -1 \pm i$$

en de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $y'' + 2y' + 2y = 0$ is

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Omdat de inhomogene term een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking proberen we als particuliere oplossing

$$\begin{gathered} y_p(x) = x\big(e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x))\big) = xf(x) \\ y_p'(x) = xf'(x) + f(x), \qquad y_p''(x) = xf''(x) + 2f'(x) \end{gathered}$$

waarbij $f$ dus een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking. Invullen geeft

$$\begin{gathered} 2e^{-x}\cos(x) = y_p'' + 2y_p' + 2y_p = x(f'' + 2f' + 2f) + 2f' + 2f = 2f' + 2f \\ = -2e^{-x}(A\cos(x) + A\sin(x) - B\cos(x) + B\sin(x)) + 2e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x)) \\ = e^{-x}\big((-2A + 2B + 2A)\cos(x) + (-2A - 2B + 2B)\sin(x)\big) = e^{-x}\big((2B)\cos(x) + (-2A)\sin(x)\big) \end{gathered}$$

dus kies $B = 1$ en $A = 0$, zodat we vinden dat $y_p(x) = xe^{-x}\sin(x)$. Dan is de algemene oplossing van $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\cos(x)$ gegeven door

$$y(x) = xe^{-x}\sin(x) + C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**Opgave 7.**

(a) Vul de machtreeksontwikkeling in, dus

$$\begin{gathered} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \end{gathered}$$

in de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}
0 &= x\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{3}{2} - x)\frac{dy}{dx} - 2y \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

Merk op dat je alle reeksen bij $n = 0$ kunt laten beginnen, omdat er steeds een factor $n$ in staat die de term $n = 0$ gelijk aan 0 laat zijn. Dus

$$\begin{gathered}
0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \Longrightarrow \\
a_{n+1}(n+1)n + \frac{3}{2}(n+1)a_{n+1} - a_n n - 2a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad \Longrightarrow \\
(n+1)(n+\frac{3}{2})a_{n+1} = (n+2)a_n \quad \forall n \geq 0
\end{gathered}$$

Alle coëfficiënten van machten van $x$ moeten 0 zijn, dus we vinden $\frac{3}{2}a_1 = 2a_0$ (ofwel $a_1 = \frac{4}{3}a_0$) en $2\frac{5}{2}a_2 = 3a_1$ (ofwel $a_2 = \frac{3}{5}a_1 = \frac{4}{5}a_0$) en de algemene recurrente betrekking is gegeven door

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)}{(n+\frac{3}{2})(n+1)}a_n$$

(b) Merk op dat

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} &= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+\frac{3}{2})(n+1)} \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2/n)}{(n+\frac{3}{2})(1+1/n)} = 0 < 1
\end{aligned}$$

dus is de reeks absoluut convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus de convergentiestraal $R = \infty$.

(c) Uit de recurrente betrekking zien we dat de waarde van $a_0$ alle andere coëfficiënten bepaalt. Dus de dimensie van de ruimte van machtreeksoplossingen van deze differentiaalvergelijking is 1.

**Opgave 8.**

(a) Gebruik de binomiaalstelling met $r = -\frac{1}{2}$ om

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!} y^n$$

af te leiden. Vervang nu $y = -x^2$ en herschrijf

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!}(-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^{2n}$$

Integreer dan krijgen we

$$\arcsin(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

en door $x = 0$ aan beide zijden te nemen, zien we $C = 0$. Dus

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(b) Vervang $x = \sin t$, dan krijgen we

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}$$

gegeven is dat we dit termsgewijs kunnen integreren over $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Dit geeft

$$\frac{1}{8}\pi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} t\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{1}{2n+1} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Voor de term $n = 0$ is de integraal gelijk aan 1, en kan gezien worden als een product over geen termen. (Anders splits de term met $n = 0$ af inde berekening.)

(c) Gebruik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{8}\pi^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{8}\pi^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$

(d) **BONUS** Substitueer $x = \cos t$, dan $dx = -\sin t dt$ en $\sin^{2n} t = (\sin^2 t)^n = (1 - \cos^2 t)^n$ dus

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} t\, dt = -\int_1^0 (1-x^2)^n\, dx = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$$
$$= \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\, dx - \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} x^2\, dx = I_{n-1} + \int_0^1 \left(-2nx(1-x^2)^{n-1}\right) \frac{1}{2n} x\, dx$$
$$= I_{n-1} + \left((1-x^2)^n \frac{1}{2n} x\right)\Big|_{x=0}^1 - \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$$

dus we krijgen

$$(1 + \frac{1}{2n}) I_n = I_{n-1} \quad \Longrightarrow \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

Met de beginwaarde

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin t\, dt = \cos t\Big|_{t=0}^{\frac{1}{2}\pi} = 1$$

volgt de uitkomst direct.