Tentamen - Calculus 4, 17 juni 2016, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

-Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.

-Als je de ruimte tijdelijk verlaat, geef dan a.j.b. je mobiele telefoon aan de surveillanten.

-Je mag zowel in het Engels als in het Nederlands schrijven.

-Vergeet niet je naam te schrijven op elk blad dat je inlevert.

-Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

-Je mag de formules gebruiken: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Opgave 1. *15pnt.* Zij D het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheden:

$$0 \leq x, y, z \leq 1, \qquad x + y + z \geq 1.$$

Bereken:
$$\iiint_D y \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

Opgave 2. *25pnt.* Zij $\mathcal{C}$ de kromme geparametriseerd door de functie:

$$\mathbf{r}(t) = \sin(t)\mathbf{i} + \sin(t)\cos(t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

a) Maak een schets van de kromme $\mathcal{C}$.

b) Beschouw de transformatie gegeven door de formules:

$$x = u, \qquad y = u\cos(t),$$

tussen de gebieden

$$A: \quad x \geq |y|, \qquad \text{en} \qquad B: \quad u \geq 0, \quad t \in [0, \pi].$$

Bereken het oppervlakte-element $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in de (u, t) coördinaten.

c) Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door $\mathcal{C}$ met behulp van de substitutie van b).

d) Bereken opnieuw de oppervlakte van het gebied begrensd door $\mathcal{C}$ met behulp van de stelling van Green voor het vectorveld $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$.

Opgave 3. *25pnt.* Zij $\mathcal{S}$ het oppervlak gegeven door:

$$0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq \pi/2, \; z = e^x \cos(y).$$

We oriënteren $\mathcal{S}$ zó dat de positieve normaalvector naar boven wijst. De rand van $\mathcal{S}$ noemen wij $\mathcal{C}$.

a) Maak een schets van $\mathcal{S}$ en geef op de tekening de geïnduceerde oriëntatie van $\mathcal{C}$ aan.

b) In de parametrisering $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, e^x \cos(y))$ van $\mathcal{S}$ bereken:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{N}\mathrm{d}S.$$

c) Ofwel door een directe berekening of met hulp van de stelling van Stokes, bereken:

$$\oint_{\mathcal{C}} -\sin(y)e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x + \cos(y)e^{2z}\mathrm{d}y + 2\sin(y)e^{2z}\mathrm{d}z.$$

Opgave 4. *35pnt.* Zij D de halve bal van radius $a > 0$:

$$D: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad z \geq 0.$$

Het oppervlak van D bestaat uit de twee oppervlakken:

$$\mathcal{S}_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \;\; z \geq 0; \qquad \mathcal{S}_2: \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \;\; z = 0.$$

We oriënteren $\mathcal{S}_1$ zó dat de buitenzijde van de bol D de positieve zijde is. Zij $\mathcal{C}$ de rand van $\mathcal{S}_1$. Geef $\mathcal{C}$ de geïnduceerde oriëntatie van $\mathcal{S}_1$. Beschouw het vectorveld:

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}.$$

a) Maak een schets van D en geef op de tekening de oriëntaties van $\mathcal{C}$ aan.

b) Bereken de kringintegraal:
$$\oint_{\mathcal{C}} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z.$$

c) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ die door $\mathcal{S}_1$ uit D stroomt:
$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

d) Bereken de integraal:
$$\iiint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

e) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ die door $\mathcal{S}_1$ uit D stroomt met behulp van de Divergentiestelling.

Exam - Calculus 4, June 17 2016, 8:30 - 11:30

Some remarks:

-You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.

-When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.

-You may write in English or in Dutch.

-Don't forget to write your name on each sheet of paper you are handing in.

-For each answer, explain how you obtained it.

-You may use the formulas: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Problem 1. *15pts.* Let D be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequalities:

$$0 \le x, y, z \le 1, \qquad x + y + z \ge 1.$$

Calculate:
$$\iiint_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Problem 2. *25pts.* Consider the curve $\mathcal{C}$ parameterized by the function:

$$\mathbf{r}(t) = \sin(t)\mathbf{i} + \sin(t)\cos(t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

a) Draw a sketch of the curve $\mathcal{C}$.

b) Consider the transformation given by the formulas

$$x = u, \qquad y = u\cos(t),$$

between two the domains

$$A: \quad x \ge |y|, \qquad \text{and} \qquad B: \quad u \ge 0, \quad t \in [0, \pi].$$

Calculate the area element $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ in the (u, t) coordinates.

c) Calculate the area enclosed by $\mathcal{C}$ by using the change of variable from b).

d) Calculate again the area enclosed by $\mathcal{C}$ by applying Green's Theorem for $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$.

Problem 3. *25pts.* Consider the surface $\mathcal{S}$ given by:

$$0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \pi/2, \ z = e^x\cos(y).$$

We orient $\mathcal{S}$ so that its normal vector field points upwards. Let $\mathcal{C}$ denote the boundary of $\mathcal{S}$.

a) Draw a sketch of $\mathcal{S}$ and indicate on the picture the induced orientation on $\mathcal{C}$.

b) In the parameterization $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, e^x\cos(y))$ of $\mathcal{S}$ calculate:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{N}\mathrm{d}S.$$

c) Either directly, or by using Stokes' Theorem, calculate

$$\oint_{\mathcal{C}} -\sin(y)e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x + \cos(y)e^{2z}\mathrm{d}y + 2\sin(y)e^{2z}\mathrm{d}z.$$

Problem 4. *35pts.* Let D be the half ball of radius $a > 0$:

$$D: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad z \ge 0.$$

The boundary surface of D is composed of the two surfaces:

$$\mathcal{S}_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \ge 0; \qquad \mathcal{S}_2: \quad x^2 + y^2 \le a^2, \quad z = 0.$$

We orient $\mathcal{S}_1$ so that the outside of D is the positive side. Let $\mathcal{C}$ be the boundary curve of $\mathcal{S}_1$, and consider on $\mathcal{C}$ the orientation induced from $\mathcal{S}_1$. Consider the vector field

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}.$$

a) Draw a sketch of D and indicate on the picture the orientation of $\mathcal{C}$.

b) Calculate the line integral:
$$\oint_{\mathcal{C}} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z.$$

c) Calculate the flux of $\mathbf{F}$ across $\mathcal{S}_1$ out of D:
$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

d) Calculate the integral:
$$\iiint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

e) Calculate the flux of $\mathbf{F}$ across $\mathcal{S}_2$ out of D by using the Divergence Theorem.