Tentamen - Calculus 4, 14 juli 2016, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

-Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.

-Als je de ruimte tijdelijk verlaat, geef dan a.j.b. je mobiele telefoon aan de surveillanten.

-Je mag zowel in het Engels als in het Nederlands schrijven.

-Vergeet niet je naam te schrijven op elk blad dat je inlevert.

-Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

-Je mag de formules gebruiken: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Opgave 1. *15pnt.* Zij R het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheden:

$$1 - \sin(y^2) \leq z \leq e^{y^2}, \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Bereken het volume van R.

Opgave 2. *25pnt.* Beschouw het volgende vectorveld gedefinieerd op $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{px + qy}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2}\mathbf{j},$$

die afhankelijk is van de parameters $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Zij $\mathcal{C}$ de cirkel:

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1.$$

a) Bereken de kringintegraal van $\mathbf{F}$ op $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

b) Bepaal de waarden van p, q, r, s zó dat $\mathbf{F}$ rotatievrij is.

c) Bepaal de waarden van p, q, r, s zó dat $\mathbf{F}$ conservatief is. Geef voor deze waarden expliciet een potentiaalfunctie voor $\mathbf{F}$.

Opgave 3. *25pts.* Zij $D \subset \mathbb{R}^3$ het gebied beschreven door de ongelijkheden:

$$a^2 \leq x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2,$$

voor $a > 0$. Beschouw het vectorveld:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

a) Maak een schets van D.

b) Controleer de Divergentiestelling voor F op D door **beide** zijden van de vergelijking in de stelling te berekenen.

Opgave 4. *35pts.* Zij $\mathcal{S}$ het gebied van de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ dat tussen de horizontale vlakken $z = 1$ en $z = 2$ ligt:

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 = z^2, \;\; 1 \leq z \leq 2.$$

Het deel van de rand van $\mathcal{S}$ dat in het vlak $z = 1$ ligt noemen we $\mathcal{C}_1$, en het deel dat in het vlak $z = 2$ ligt, $\mathcal{C}_2$. We oriënteren $\mathcal{S}$ zó dat het punt $(0,0,1)$ op de negatieve zijde van $\mathcal{S}$ ligt. Geef $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ de geïnduceerde oriëntatie van $\mathcal{S}$. Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F} = (y^2 + y - 1)\mathbf{i} - xyz\mathbf{j}.$$

a) Maak een schets van $\mathcal{S}$. Geef op de tekening de oriëntaties van $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ aan.

b) Bereken $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$.

c) Vind de flux van $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ die door $\mathcal{S}$ stroomt, door een directe berekening.

d) Bereken de kringintegraal van F op $\mathcal{C}_1$:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} (y^2 + y - 1)\mathrm{d}x - xyz\mathrm{d}y.$$

e) Bereken de kringintegraal van F op $\mathcal{C}_2$ met hulp van de stelling van Stokes voor $\mathcal{S}$.

Exam - Calculus 4, July 14 2016, 8:30 - 11:30

Some remarks:

-You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.

-When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.

-You may write in English or in Dutch.

-Don't forget to write your name on each sheet of paper you are handing in.

-For each answer, explain how you obtained it.

-You may use the formulas: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$.

Problem 1. *15pts.* Let R be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequalities:

$$1 - \sin(y^2) \leq z \leq e^{y^2}, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Calculate the volume of R.

Problem 2. *25pts.* Consider the following vector field on $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{px + qy}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2}\mathbf{j},$$

depending on parameters $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Let $\mathcal{C}$ be the circle:

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1.$$

a) Calculate the circulation of $\mathbf{F}$ along $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

b) Determine the values of p, q, r, s for which $\mathbf{F}$ is irrotational.

c) Determine the values of p, q, r, s for which $\mathbf{F}$ is conservative. For these values give an explicit potential function for $\mathbf{F}$.

Problem 3. *25pts.* Let $D \subset \mathbb{R}^3$ be the domain described by the inequalities:

$$a^2 \leq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2,$$

where $a > 0$. Consider the vector field:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

a) Draw a sketch of D.

b) Verify the Divergence Theorem for $\mathbf{F}$ on D by calculating **both** sides of the equality in the Theorem.

Problem 4. *35pts.* Let $\mathcal{S}$ be the region of the cone $x^2 + y^2 = z^2$ that lies between the horizontal planes $z = 1$ and $z = 2$:

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 = z^2, \ \ 1 \leq z \leq 2.$$

Let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be the components of the boundary of $\mathcal{S}$ which lie in the planes $z = 1$ and $z = 2$, respectively. We orient $\mathcal{S}$ such that the point $(0,0,1)$ lies on the negative side of $\mathcal{S}$. Put on $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ the induced orientation from $\mathcal{S}$. Consider the vector field

$$\mathbf{F} = (y^2 + y - 1)\mathbf{i} - xyz\mathbf{j}.$$

a) Draw a sketch of $\mathcal{S}$. Indicate on the picture the orientations of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$.

b) Calculate $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$.

c) Find the flux of $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ across $\mathcal{S}$ by a direct calculation.

d) Calculate the circulation of $\mathbf{F}$ on $\mathcal{C}_1$:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} (y^2 + y - 1)\mathrm{d}x - xyz\mathrm{d}y.$$

e) Find the circulation of $\mathbf{F}$ on $\mathcal{C}_2$ by using Stokes' Theorem for $\mathcal{S}$.