

Exam - Calculus 4, June 25 2015, 8:30 - 11:30

Some remarks:

- You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.
 - When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.
 - You may write in English or in Dutch.
 - Don't forget to write your name on each sheet of paper you are handing in.
 - For each answer, explain how you obtained it.
-

Problem 1. 15pts. Let D be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequalities:

$$0 \leq z^4 \leq y^2 \leq x \leq y \leq z \leq 1.$$

Calculate

$$\iiint_D \frac{6}{y(1-y)} dx dy dz.$$

Problem 2. 25pts. Consider the curve $\mathcal{C}$ parameterized by the function:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(t)) \cos(t) \mathbf{i} + (1 - \cos(t)) \sin(t) \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Draw a sketch of the curve $\mathcal{C}$.
- Show that

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| = 2 \sin(t/2).$$

Hint: use that $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$.

- Calculate the length of $\mathcal{C}$.
- Calculate the area enclosed by $\mathcal{C}$. It might help to use Green's Theorem for the vector field

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}).$$

Problem 3. 25pts. Let D be the intersection of the ball $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ with the solid cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Let $\mathcal{S}$ denote the boundary surface of D .

- Draw a sketch of D .
- Calculate the volume of D .
- Calculate the flux of the vector field

$$\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

across $\mathcal{S}$ out of D : either by a direct calculation or by applying the Divergence Theorem to $\mathbf{F}$ on D .

Problem 4. 35pts. Let $\mathcal{S}$ be the region of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ that lies between the horizontal planes $z = 0$ and $z = a$:

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq a.$$

Let $\mathcal{C}_0$ and $\mathcal{C}_1$ be the components of the boundary of $\mathcal{S}$ which lie in the planes $z = 0$ and $z = a$, respectively. Orient $\mathcal{S}$ so that the outside of the cylinder is the positive side. Put on $\mathcal{C}_0$ and $\mathcal{C}_1$ the induced orientation from $\mathcal{S}$.

Consider also the vector field

$$\mathbf{F} = (1 + y) \mathbf{i} + x(1 - z^2) \mathbf{j} + z(1 - xy) \mathbf{k}.$$

- Draw a sketch of $\mathcal{S}$. Indicate on the picture the orientations of $\mathcal{C}_0$ and $\mathcal{C}_1$.
- Calculate $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$.
- Find the flux of $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ across $\mathcal{S}$ by a direct calculation.
- Calculate the circulation of $\mathbf{F}$ on $\mathcal{C}_0$:

$$\oint_{\mathcal{C}_0} (1 + y) dx + x(1 - z^2) dy + z(1 - xy) dz.$$

- Find the circulation of $\mathbf{F}$ on $\mathcal{C}_1$ by using Stokes' Theorem for $\mathcal{S}$.

Tentamen - Calculus 4, 25 juni 2015, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

- Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.
- Als je de ruimte tijdelijk verlaat, geef dan a.j.b. je mobiele telefoon aan de surveillanten.
- Je mag zowel in het Engels als in het Nederlands schrijven.
- Vergeet niet je naam te schrijven op elk blad dat je inlevert.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

Opgave 1. 15pnt. Zij D het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheden:

$$0 \leq z^4 \leq y^2 \leq x \leq y \leq z \leq 1.$$

Bereken

$$\iiint_D \frac{6}{y(1-y)} dx dy dz.$$

Opgave 2. 25pnt. Zij $\mathcal{C}$ de kromme geparametriseerd door de functie:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - \cos(t)) \cos(t) \mathbf{i} + (1 - \cos(t)) \sin(t) \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Maak een schets van de kromme $\mathcal{C}$.
- Laat zien dat:

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| = 2 \sin(t/2).$$

Tip: gebruik dat $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$.

- Bereken de lengte van $\mathcal{C}$.
- Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door $\mathcal{C}$. *Tip: gebruik de stelling van Green voor het vectorveld*

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}).$$

Opgave 3. 25pnt. Zij D de doorsnede van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ met de massieve kegel $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Zij $\mathcal{S}$ het oppervlak van D .

- Maak een schets van D .
- Bereken het volume van D .
- Bereken de flux van het vectorveld

$$\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

die door $\mathcal{S}$ uit D stroomt: ofwel door een directe berekening of met behulp van de Divergentiestelling voor $\mathbf{F}$ op D .

Opgave 4. 35pnt. Zij $\mathcal{S}$ het gebied van de cilinder $x^2 + y^2 = 1$ dat tussen de horizontale vlakken $z = 0$ en $z = a$ ligt:

$$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq a.$$

Het deel van de rand van $\mathcal{S}$ dat in het vlak $z = 0$ ligt noemen we $\mathcal{C}_0$, en het deel dat in het vlak $z = a$ ligt, $\mathcal{C}_1$. We oriënteren $\mathcal{S}$ zó dat de buitenzijde van de cilinder de positieve zijde is. Geef $\mathcal{C}_0$ en $\mathcal{C}_1$ de geïnduceerde oriëntatie van $\mathcal{S}$.

Beschouw ook het vectorveld

$$\mathbf{F} = (1 + y) \mathbf{i} + x(1 - z^2) \mathbf{j} + z(1 - xy) \mathbf{k}.$$

- Maak een schets van $\mathcal{S}$. Geef op de tekening de oriëntaties van $\mathcal{C}_0$ en $\mathcal{C}_1$ aan.
- Bereken $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$.
- Vind de flux van $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ die door $\mathcal{S}$ stroomt, door een directe berekening.
- Bereken de kringintegraal van $\mathbf{F}$ op $\mathcal{C}_0$:

$$\oint_{\mathcal{C}_0} (1 + y) dx + x(1 - z^2) dy + z(1 - xy) dz.$$

- Bereken de kringintegraal van $\mathbf{F}$ op $\mathcal{C}_1$ met hulp van de stelling van Stokes voor $\mathcal{S}$.