

Exam - Calculus 4, August 6 2015, 8:30 - 11:30

Some remarks:

- You are not allowed to use books, notes, notebooks, mobile phones, tablets, etc.
 - When you are leaving temporarily the room, please hand in your mobile phone to the supervisors.
 - You may write in English or in Dutch.
 - Don't forget to write your name on each sheet of paper you are handing in.
 - For each answer, explain how you obtained it.
-

Problem 1. 15pts. Let R be the domain in $\mathbb{R}^3$ described by the inequalities:

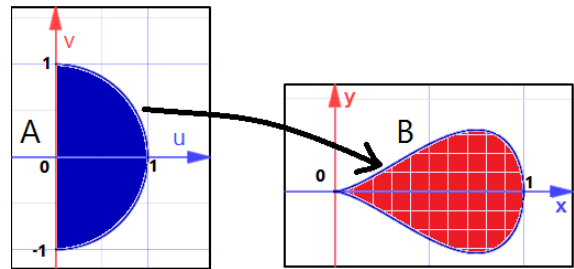
$$0 \leq x \leq e^{y^2}, \quad 0 \leq z \leq y \leq 2z \leq 1.$$

Calculate the volume of R .

Problem 2. 25pts.

Let A be half-disk in the (u, v) -plane given by: $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, and let B be the region of the (x, y) -plane described by the inequality: $y^2 \leq (1 - x)x^3$ (see the figures to the right). Consider the transformation from A to B given by the formulas:

$$x(u, v) = u^2, \quad y(u, v) = u^3 v.$$



- Check that $(x(u, v), y(u, v))$ is indeed a point in B for any (u, v) in A .
- Calculate the area element $dx dy$ in the (u, v) coordinates.
- Calculate the integral:

$$\iint_B \frac{x^4 + y^2}{x^5} dx dy.$$

Problem 3. 25pts. Let D be the domain described by: $x, y, z \geq 0$, $x \leq 1$, $y + z \leq 1$. Consider the vector field:

$$\mathbf{F} := e^z x \mathbf{i} + yz \mathbf{j} - yz \mathbf{k}.$$

- Draw a sketch of D .
- Verify the Divergence Theorem for $\mathbf{F}$ on D by calculating **both** sides of the equality in the Theorem.

Problem 4. 35pts. Let $\mathcal{S}$ be surface given by:

$$x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Let $\mathcal{C}$ denote the boundary curve of $\mathcal{S}$. Orient $\mathcal{S}$ so that the positive normal vector points upwards.

- Draw a sketch of $\mathcal{S}$, and indicate on the picture the induced boundary orientation on $\mathcal{C}$.
- Calculate the integral:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\sqrt{5 - 4z^2}} ds.$$

Hint: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

- In the parameterization $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ of $\mathcal{S}$ calculate:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS.$$

- Calculate the gradient of the function $g(x, y, z) = xy + \sin(y)e^{2z}$.
- Calculate the line integral:

$$\oint_{\mathcal{C}} (2x + \cos(y)e^{2z}) dy + 2 \sin(y)e^{2z} dz.$$

Tentamen - Calculus 4, 6 augustus 2015, 8:30 - 11:30

Enkele opmerkingen:

- Je mag geen gebruik maken van boeken, notities, notitieboekjes, mobiele telefoons, tablets, etc.
- Als je de ruimte tijdelijk verlaat, geef dan a.j.b. je mobiele telefoon aan de surveillanten.
- Je mag zowel in het Engels als in het Nederlands schrijven.
- Vergeet niet je naam te schrijven op elk blad dat je inlevert.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.

Opgave 1. 15pnt. Zij R het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door de ongelijkheden:

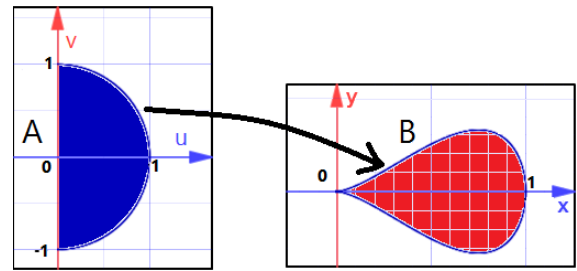
$$0 \leq x \leq e^{y^2}, \quad 0 \leq z \leq y \leq 2z \leq 1.$$

Bereken het volume van R .

Opgave 2. 25pnt.

Zij A de halve schijf in het (u, v) -vlak gegeven door: $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, en zij B het gebied in het (x, y) -vlak beschreven door de ongelijkheid: $y^2 \leq (1-x)x^3$ (kijk naar de afbeeldingen rechts). Beschouw de transformatie van A naar B gegeven door de formules:

$$x(u, v) = u^2, \quad y(u, v) = u^3 v.$$



- Controleer dat, voor elke (u, v) in A , $(x(u, v), y(u, v))$ inderdaad een punt in B is.
- Bereken het oppervlakte-element $dx dy$ in de (u, v) coördinaten.
- Bereken de integraal:

$$\iint_B \frac{x^4 + y^2}{x^5} dx dy.$$

Opgave 3. 25pnt. Zij D het gebied in $\mathbb{R}^3$ beschreven door: $x, y, z \geq 0$, $x \leq 1$, $y + z \leq 1$. Beschouw het vectorveld:

$$\mathbf{F} := e^z x \mathbf{i} + yz \mathbf{j} - yz \mathbf{k}.$$

- Maak een schets van D .
- Controleer de Divergentiestelling voor $\mathbf{F}$ op D door **beide** zijden van de vergelijking in de stelling te berekenen.

Opgave 4. 35pnt. Zij $\mathcal{S}$ het oppervlak gegeven door:

$$x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

De rand van $\mathcal{S}$ noemen wij $\mathcal{C}$. We oriënteren $\mathcal{S}$ zó dat de positieve normaalvector naar boven wijst.

- Maak een schets van $\mathcal{S}$ en geef op de tekening de geïnduceerde oriëntatie van $\mathcal{C}$ aan.
- Bereken de integraal:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\sqrt{5 - 4z^2}} ds.$$

Tip: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

- In de parametrisering $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ van $\mathcal{S}$ bereken:
$$d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS.$$

- Bereken de gradiënt van de functie $g(x, y, z) = xy + \sin(y)e^{2z}$.
- Bereken de kringintegraal:

$$\oint_{\mathcal{C}} (2x + \cos(y)e^{2z}) dy + 2 \sin(y)e^{2z} dz.$$