Tentamen Calculus 3 (kans A)

Opgave 1. *(6 punten)*
Een vogel beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ op het traject

$$\mathbf{c}(t) = \{(t, 2t, t - t^2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 1]\}.$$

(i) Geef voor de tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$ de positie, de snelheid en de richtingsvector van de beweging van de vogel aan.

(ii) Bepaal het tijdstip t_0 waarop de vogel minimale snelheid heeft en geef deze snelheid aan.

(iii) De temperatuur in het punt (x, y, z) is op tijdstip t gegeven door

$$T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1+z}(1+t).$$

De temperatuur die de vogel op zijn traject waarneemt is dan $T(\mathbf{c}(t), t)$.

Bepaal op de tijdstippen $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ en $t = 1$ de snelheid waarmee de temperatuur voor de vogel verandert.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** De richtingsvector op tijdstip t is $\mathbf{c}'(t) = (1, 2, 1 - 2t)$, de snelheid is dan $v(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (1-2t)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 6}$. Op tijdstip $t = 0$ is de positie $(0, 0, 0)$, de snelheid $\sqrt{6}$ en de richtingsvector $(1, 2, 1)$, op tijdstip $t = 1$ is de positie $(1, 2, 0)$, de snelheid $\sqrt{6}$ en de richtingsvector $(1, 2, -1)$.

(ii) **(1 punt)** Voor het gemak minimaliseren we $v(t)^2 = 4t^2 - 4t + 6$. Er geldt $(v(t)^2)' = 8t - 4$ en dit heeft een kritiek punt voor $t_0 = \frac{1}{2}$. De snelheid voor $t_0 = \frac{1}{2}$ is $\sqrt{5}$ en omdat dit het enige kritieke punt tussen 0 en 1 is en $\sqrt{5} < \sqrt{6}$ moet het een minimum zijn.

(iii) **(3 punten)** Door invullen van $\mathbf{c}(t)$ in de functie T vinden we de expliciete formule $T(t) = \frac{2t^2}{1+t-t^2}(1+t) = \frac{2t^2+2t^3}{1+t-t^2}$ en hieruit laat zich de temperatuurverandering op het traject van de vogel door afleiden rechtstreeks bepalen.

Alternatief kunnen we de kettingregel gebruiken:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

met $x(t) = t$, $y(t) = 2t$, $z(t) = t - t^2$. Dit geeft

$$\frac{dT}{dt} = \frac{y(1+t)}{1+z} + \frac{x(1+t)}{1+z} \cdot 2 - \frac{xy(1+t)}{(1+z)^2}(1-2t) + \frac{xy}{1+z}$$

Voor $t = 0$ hebben we $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ en dus $\frac{dT}{dt}(0) = 0$, voor $t = \frac{1}{2}$ is $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $y(\frac{1}{2}) = 1$, $z(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ en dus $\frac{dT}{dt}(\frac{1}{2}) = \frac{3/2}{5/4} + \frac{3/2}{5/4} + \frac{1/2}{5/4} = \frac{14}{5}$, en voor $t = 1$ is $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, $z(1) = 0$ en dus $\frac{dT}{dt}(1) = 4 + 4 + 4 + 2 = 14$.

Opgave 2. *(6 punten)*
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y,z) = xy + z + 3xz^5$.

(i) Laat zien dat zich de variabele z op het niveauoppervlak $f(x,y,z) = 4$ in een omgeving van een punt (x_0, y_0, z_0) met $x_0 \geq 0$ als functie $z = g(x,y)$ laat uitdrukken.

(ii) Zij $z = g(x,y)$ op het niveauoppervlak $f(x,y,z) = 4$ in een omgeving van het punt $(1,0,1)$. Bepaal $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ in het punt $(x,y) = (1,0)$.

(iii) Geef met behulp van de linearisering van de functie $g(x,y)$ uit deel (ii) een benadering van de functiewaarde $g(1.08, 0.08)$.

(iv) Bepaal een punt (x_0, y_0, z_0) zo dat zich z op het niveauoppervlak $f(x,y,z) = 4$ in een omgeving van dit punt als functie $z = g(x,y)$ laat uitdrukken en zo dat $g(x,y)$ in (x_0, y_0) een kritiek punt heeft.

Oplossing:

(i) **(1 punt)** Zo'n functie g bestaat als $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, dus als $1 + 15xz^4 \neq 0$. Voor $x \geq 0$ geldt altijd $1 + 15xz^4 \geq 1 > 0$.

(ii) **(2 punten)** Er geldt

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y + 3z^5}{1 + 15xz^4}$$

en in het punt $(1,0,1)$ geeft dit $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0) = -\frac{3}{16}$. Analoog is

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{1 + 15xz^4}$$

en dit geeft $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0) = -\frac{1}{16}$.

(iii) **(1 punt)** De linearisering van $g(x,y)$ rond het punt $(1,0)$ is

$$L(x,y) = g(1,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,0) \cdot (x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) \cdot y = 1 - \frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{16}y.$$

Voor het punt $(1.08, 0.08)$ geeft dit $g(1.08, 0.08) \approx L(1.08, 0.08) = 1 - 3/200 - 1/200 = 1 - 1/50 = 0.98$.

(iv) **(2 punten)** In deel (ii) hebben we gezien dat $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y+3z^5}{1+15xz^4}$ en $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{1+15xz^4}$. Voor een kritiek punt (x_0, y_0) van $g(x,y)$ moet dus gelden dat $x_0 = 0$ en $y_0 + 3z_0^5 = 0$. Maar op het niveauoppervlak $f(x,y,z) = 4$ volgt uit $x_0 = 0$ dat $z_0 = 4$, dus moet $y_0 = -3 \cdot 4^5 = -3072$ gelden.

Opgave 3. *(6 punten)*
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x,y,z) = x^2y + yz + z^2$.

(i) Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1,-1,1)$ in de richting $\mathbf{i}+\mathbf{k} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(ii) Een rups loopt op het vlak met vergelijking $x+y+z=1$ zo dat f op zijn pad constant is. Wat is de looprichting van de rups in het punt $(1,-1,1)$?

(iii) Een mier loopt op het vlak met vergelijking $x+y+z=1$ zo dat f op zijn pad het snelst toeneemt. Wat is de looprichting van de mier in het punt $(1,-1,1)$?

Oplossing: De gradiënt van f is $\nabla f = \begin{pmatrix}2xy\\x^2+z\\y+2z\end{pmatrix}$ en dus is $\nabla f(1,-1,1) = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

(i) **(2 punten)** De richtingsafgeleide is het inproduct van de gradiënt met de eenheidsvector in de gevraagde richting, dus $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) **(2 punten)** De normaalvector van het vlak is $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, de looprichting van de rups is loodrecht hierop. Verder loopt de rups op een niveauoppervlak, daarom is de looprichting ook loodrecht op de gradiënt. Een vector loodrecht op de normaalvector van het vlak en loodrecht op de gradiënt is $\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$ (deze laat zich bijvoorbeeld als uitproduct bepalen).

(iii) **(2 punten)** Ook in dit geval staat de looprichting loodrecht op de normaalvector van het vlak, en deze keer ook loodrecht op de looprichting van de rups (want de richting van de snelste toename staat loodrecht op een niveaukromme). Als richting vinden we deze keer $\begin{pmatrix}-7\\5\\2\end{pmatrix}$ en we merken op dat het inproduct van deze vector met de gradiënt positief is, dus dit is inderdaad de richting van de snelste toename (en niet van de snelste afname).

Opgave 4. *(6 punten)*
Zij $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = e^{x^2+y^2}(1+cxy)$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$.

(i) Bepaal de Taylor ontwikkeling van graad 2 van f in het punt $(0,0)$.

(ii) Laat zien dat het punt $(0,0)$ voor iedere waarde van c een kritiek punt van f is.

(iii) Bepaal de waarden van c zo dat $(0,0)$ een

(a) lokaal maximum;

(b) zadelpunt;

(c) lokaal minimum

van f is.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** De Taylor ontwikkeling van graad 2 van $e^{x^2+y^2}$ is $1+(x^2+y^2)$, daarom bestaat de Taylor ontwikkeling van f van graad 2 uit de termen van graad ≤ 2 in $(1+(x^2+y^2))(1+cxy)$ en dat is $1+x^2+y^2+cxy$.

(ii) **(1 punt)** De gradiënt van f in $(0,0)$ is nul, omdat de Taylor ontwikkeling geen termen van graad 1 bevat.

(iii) **(3 punten)** De term van graad 2 in de Taylor ontwikkeling is gelijk aan

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right)$$

met deel (i) volgt hieruit dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = c$. De Hesse matrix in het punt $(0,0)$ is dus $H = \begin{pmatrix} 2 & c \\ c & 2 \end{pmatrix}$. Er geldt $\det H = 4 - c^2$, dus is H positief definiet als $|c| < 2$ en indefiniet als $|c| > 2$. Wegens $H_{11} = 2 > 0$ is H nooit negatief definiet. Voor $|c| < 2$ heeft f dus in $(0,0)$ een lokaal minimum, voor $|c| > 2$ een zadelpunt en $(0,0)$ is voor geen waarde van c een lokaal maximum.

Voor $|c| = 2$ geeft de Hesse matrix geen uitsluitsel over het gedrag van de functie, omdat in dit geval $\det H = 0$, d.w.z. H heeft een eigenvector voor de eigenwaarde 0.

Opgave 5. *(6 punten)*
In $\mathbb{R}^3$ zij $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Voor gegeven constanten $m, a > 0$ is een vector veld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ gedefinieerd door

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\dfrac{m}{a^3}\,\mathbf{r} & \text{als } r \leq a; \\ -\dfrac{m}{r^3}\,\mathbf{r} & \text{als } r > a. \end{cases}$$

(i) Laat zien dat $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ aan de noodzakelijke voorwaarden voor een conservatief veld voldoet.

(ii) Geef een potentiaalfunctie $\phi(x,y,z)$ aan met $\mathbf{F} = \nabla\phi$ zo dat ϕ continu is op $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** We schrijven F_1, F_2 en F_3 voor de componenten van $\mathbf{F}$. De noodzakelijke voorwaarden voor een conservatief veld zijn dan $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$, $\partial F_2/\partial z = \partial F_3/\partial y$, $\partial F_3/\partial x = \partial F_1/\partial z$. Omdat de functie symmetrisch is in x, y, z is het voldoende de eerste van deze drie voorwaarden te controleren.

Voor $r \leq a$ is $F_1(x,y,z) = -\frac{m}{a^3}\,x$ en $F_2(x,y,z) = -\frac{m}{a^3}\,y$ en dus $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x = 0$.

Voor $r > a$ is $F_1(x,y,z) = -m(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,x$ en $F_2(x,y,z) = -m(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,y$ en dus $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x = 3m(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\,xy$.

(ii) **(4 punten)** Voor $r \leq a$ volgt uit $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{m}{a^3} x$ door integreren m.b.t. x dat $\phi(x, y, z) = -\frac{m}{2a^3} x^2 + g(y, z)$ en wegens de symmetrie in x, y, z vinden we

$$\phi(x, y, z) = -\frac{m}{2a^3}(x^2 + y^2 + z^2) + C = -\frac{mr^2}{2a^3} + C.$$

Voor $r > a$ volgt uit $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{mx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$ door integreren dat $\phi(x, y, z) = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + g(y, z)$ en wegens de symmetrie in x, y, z vinden we

$$\phi(x, y, z) = \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C' = \frac{m}{r} + C'.$$

We kiezen nu $C' = 0$, om ϕ continu te maken moet dan voor $r = a$ gelden dat $\frac{m}{a} = -\frac{ma^2}{2a^3} + C = -\frac{m}{2a} + C$, dus $C = \frac{3m}{2a}$. Een continue potentiaalfunctie ϕ van $\mathbf{F}$ is voor $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dus gegeven door

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{mr^2}{2a^3} + \frac{3m}{2a} & \text{als } r \leq a; \\ \frac{m}{r} & \text{als } r > a. \end{cases}$$

Opgave 6. *(6 punten)*
Bepaal de maximale en de minimale waarden die $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ op de doorsnede van de dubbele kegel met vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$ en het vlak met vergelijking $x - 2z = 3$ aanneemt (deze doorsnede is een ellips).

Oplossing:

Optie 1: We gebruiken de vergelijking van het vlak om het aantal variabelen en het aantal randvoorwaarden te reduceren, de functies worden dan echter iets minder eenvoudig. Invullen van $x = 3+2z$ geeft $f(y, z) = y^2+5z^2+12z+9$ en de randvoorwaarde $y^2+3z^2+12z+9 = 0$ en dus de Lagrange functie

$$L(y, z, \lambda) = y^2 + 5z^2 + 12z + 9 + \lambda(y^2 + 3z^2 + 12z + 9).$$

Gelijkstellen aan 0 van de gradiënt ∇L geeft dan

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2y + 2\lambda y \\ 10z + 12 + 6\lambda z + 12\lambda \\ y^2 + 3z^2 + 12z + 9 \end{pmatrix} = 0$$

Uit $2y + 2\lambda y = 2y(1 + \lambda) = 0$ volgt $y = 0$ of $\lambda = -1$. Maar $\lambda = -1$ geeft in de tweede component $4z = 0$ en de derde component wordt dan $y^2 + 9$ en dit is nooit 0. We hebben dus $y = 0$ en de derde component geeft dan $3z^2 + 12z + 9 = 0$, d.w.z. $3(z + 1)(z + 3) = 0$. Voor $z = -1$ hebben we $x = 1$ en dan is $f(1, 0, -1) = 2$, Voor $z = -3$ is $x = -3$ en dan is $f(-3, 0, -3) = 18$. De minimale waarde van $f(x, y, z)$ op de gegeven doorsnede is dus 2, de maximale waarde is 18.

Optie 2: We hanteren de Lagrange functie met twee randvoorwaarden:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(x - 2z - 3).$$

Gelijkstellen aan 0 van de gradiënt ∇L geeft dan

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda x + \mu \\ 2y + 2\lambda y \\ 2z - 2\lambda z - 2\mu \\ x^2 + y^2 - z^2 \\ x - 2z - 3 \end{pmatrix} = 0$$

Ook hier volgt $y = 0$ of $\lambda = -1$, maar uit $\lambda = -1$ volgt in de eerste component $\mu = 0$ en hiermee in de derde component $z = 0$. Dan zou ook $x = y = 0$ moeten zijn, maar $(0, 0, 0)$ voldoet niet aan $x - 2z = 3$. Ook hier volgt dus $y = 0$ en de vierde component geeft dan $x = \pm z$. Invullen van $x = z$ in $x - 2z = 3$ geeft $z = -3$ en invullen van $x = -z$ geeft $z = -1$ en we vinden dezelfde extrema als bij optie 1.