Tentamen Calculus 3 (kans A)

Opgave 1. *(6 punten)*
Een vogel beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ op het traject

$$\mathbf{c}(t) = \{(t, 2t, t - t^2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0,1]\}.$$

(i) Geef voor de tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$ de positie, de snelheid en de richtingsvector van de beweging van de vogel aan.

(ii) Bepaal het tijdstip t_0 waarop de vogel minimale snelheid heeft en geef deze snelheid aan.

(iii) De temperatuur in het punt (x, y, z) is op tijdstip t gegeven door

$$T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1+z}(1+t).$$

De temperatuur die de vogel op zijn traject waarneemt is dan $T(\mathbf{c}(t), t)$.

Bepaal op de tijdstippen $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ en $t = 1$ de snelheid waarmee de temperatuur voor de vogel verandert.

Opgave 2. *(6 punten)*
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = xy + z + 3xz^5$.

(i) Laat zien dat zich de variabele z op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 4$ in een omgeving van een punt (x_0, y_0, z_0) met $x_0 \geq 0$ als functie $z = g(x, y)$ laat uitdrukken.

(ii) Zij $z = g(x, y)$ op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 4$ in een omgeving van het punt $(1, 0, 1)$. Bepaal $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ in het punt $(x, y) = (1, 0)$.

(iii) Geef met behulp van de linearisering van de functie $g(x, y)$ uit deel (ii) een benadering van de functiewaarde $g(1.08, 0.08)$.

(iv) Bepaal een punt (x_0, y_0, z_0) zo dat zich z op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 4$ in een omgeving van dit punt als functie $z = g(x, y)$ laat uitdrukken en zo dat $g(x, y)$ in (x_0, y_0) een kritiek punt heeft.

Opgave 3. *(6 punten)*
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x, y, z) = x^2y + yz + z^2$.

(i) Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1, -1, 1)$ in de richting $\mathbf{i} + \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Een rups loopt op het vlak met vergelijking $x + y + z = 1$ zo dat f op zijn pad constant is. Wat is de looprichting van de rups in het punt $(1, -1, 1)$?

(iii) Een mier loopt op het vlak met vergelijking $x + y + z = 1$ zo dat f op zijn pad het snelst toeneemt. Wat is de looprichting van de mier in het punt $(1, -1, 1)$?

z.o.z. voor Opgaven 4 t/m 6

Opgave 4. *(6 punten)*
Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = e^{x^2+y^2}(1+cxy)$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$.

(i) Bepaal de Taylor ontwikkeling van graad 2 van f in het punt $(0,0)$.

(ii) Laat zien dat het punt $(0,0)$ voor iedere waarde van c een kritiek punt van f is.

(iii) Bepaal de waarden van c zo dat $(0,0)$ een

  (a) lokaal maximum;
  (b) zadelpunt;
  (c) lokaal minimum

  van f is.

Opgave 5. *(6 punten)*
In $\mathbb{R}^3$ zij $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Voor gegeven constanten $m, a > 0$ is een vector veld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ gedefinieerd door

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\dfrac{m}{a^3}\,\mathbf{r} & \text{als } r \leq a; \\ -\dfrac{m}{r^3}\,\mathbf{r} & \text{als } r > a. \end{cases}$$

(i) Laat zien dat $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ aan de noodzakelijke voorwaarden voor een conservatief veld voldoet.

(ii) Geef een potentiaalfunctie $\phi(x,y,z)$ aan met $\mathbf{F} = \nabla\phi$ zo dat ϕ continu is op $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$.

Opgave 6. *(6 punten)*
Bepaal de maximale en de minimale waarden die $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ op de doorsnede van de dubbele kegel met vergelijking $x^2+y^2 = z^2$ en het vlak met vergelijking $x - 2z = 3$ aanneemt (deze doorsnede is een ellips).

Succes ermee!