Tentamen Calculus 3 (kans B)

Opgave 1. *(4 punten)*
Een deeltje beweegt voor $t \geq 0$ op het pad

$$\mathbf{c}(t) = \Big\{\big(t\sin(t), t\cos(t), \tfrac{\sqrt{8}}{3}t^{\frac{3}{2}}\big) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0\Big\}.$$

(i) Geef voor het tijdstip $t_0 = \pi$ de positie, de snelheid en de richtingsvector van de beweging van het deeltje aan.

(ii) Bepaal voor $T > 0$ de lengte van het pad dat het deeltje in het tijdsinterval $0 \leq t \leq T$ aflegt.

(iii) Stel op tijdstip $t_0 = \pi$ verdwijnt de kracht die het deeltje op zijn pad dwingt. Vanaf dit tijdstip zal het deeltje met constante snelheid en richting bewegen.

Wat zijn de coördinaten van het deeltje op tijdstip $t_1 = 2\pi$?

Oplossing:

(i) **(1.5 punten)** De positie op $t_0 = \pi$ is $\mathbf{c}(\pi) = (0, -\pi, \frac{\sqrt{8}}{3}\pi^{\frac{3}{2}})$.

Voor de snelheid en de richtingsvector is de afgeleide $\mathbf{c}'(t)$ nodig, deze is $\mathbf{c}'(t) = (\sin(t) + t\cos(t), \cos(t) - t\sin(t), \sqrt{2t})$. Op $t_0 = \pi$ is dit $\mathbf{c}'(\pi) = (-\pi, -1, \sqrt{2\pi})$, dit is de richtingsvector op tijdstip $t_0 = \pi$.

De snelheid op $t_0 = \pi$ is $\|\mathbf{c}'(\pi)\| = \sqrt{\pi^2 + 1 + 2\pi} = \sqrt{(\pi+1)^2} = \pi + 1$.

(ii) **(1.5 punten)** De lengte van het pad is

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt &= \int_0^T \sqrt{\big(\frac{dx}{dt}\big)^2 + \big(\frac{dy}{dt}\big)^2 + \big(\frac{dz}{dt}\big)^2}\, dt \\
&= \int_0^T \sqrt{(\sin(t) + t\cos(t))^2 + (\cos(t) - t\sin(t))^2 + 2t}\, dt \\
&= \int_0^T \sqrt{1 + t^2 + 2t}\, dt = \int_0^T (t+1)\, dt = \frac{t^2}{2} + t\Big|_0^T = \frac{T^2}{2} + T.
\end{aligned}$$

(iii) **(1 punt)** Omdat de snelheid en richting vanaf tijdstip $t_0 = \pi$ constant blijft, is de positie op tijdstip t_1 gelijk aan $\mathbf{c}(t_0) + \mathbf{c}'(t_0)(t_1 - t_0) = (0, -\pi, \frac{\sqrt{8}}{3}\pi^{\frac{3}{2}}) + \pi(-\pi, -1, \sqrt{2\pi}) = (-\pi^2, -2\pi, (\frac{\sqrt{8}}{3} + \sqrt{2})\pi^{\frac{3}{2}}) = (-\pi^2, -2\pi, \frac{5\sqrt{2}}{3}\pi^{\frac{3}{2}})$.

Opgave 2. *(6 punten)*
De variabelen x, y en u, v zijn gerelateerd door de vergelijkingen

$$x = u^3 - uv \quad \text{en} \quad y = 3uv + 2v^2.$$

(i) Laat zien dat zich u en v in een omgeving van het punt $(u_0, v_0) = (-1, 2)$ als functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$ laten schrijven.

(ii) Bepaal de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ in het punt $(u_0, v_0) = (-1, 2)$.

(iii) Bepaal een benadering van $u(1.02, 1.97)$.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** Schrijf $F_1(u, v, x, y) = u^3 - uv - x$ en $F_2(u, v, x, y) = 3uv + 2v^2 - y$.

De Jacobi matrix met betrekking tot u en v is $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 - v & -u \\ 3v & 3u + 4v \end{pmatrix}$ en wegens $\det J_{u=-1,v=2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ laten zich u en v (volgens de impliciete functie stelling) in een omgeving van het punt $(-1, 2)$ als functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$ schrijven.

(ii) **(3 punten)** Partieel afleiden van de twee gegeven relaties naar x geeft

$$1 = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{en} \quad 0 = 3v \frac{\partial u}{\partial x} + 3u \frac{\partial v}{\partial x} + 4v \frac{\partial v}{\partial x}$$

in het punt $(u_0, v_0) = (-1, 2)$ geeft dit $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1$ en $6\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, d.w.z. de gezochte partiële afgeleiden zijn een oplossing van het stelsel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegens $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ volgt hieruit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Partieel afleiden naar y geeft analoog $\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ en $6\dfrac{\partial u}{\partial y} + 5\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1$ en hieruit volgt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In het bijzonder hebben we dus $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -5$ en $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$ in het punt $(-1, 2)$.

(iii) **(1 punt)** Voor $(u, v) = (-1, 2)$ geldt $x = 1$ en $y = 2$. De differentiaal du is gegeven door $du = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy$ en voor $dx = 0.02$ en $dy = -0.03$ vinden we hiermee met de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -5$ en $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$ uit deel (ii) dat $du = -5 \cdot 0.02 + 1 \cdot (-0.03) = -0.1 - 0.03 = -0.13$.

De benadering van $u(1.02, 1.97)$ is dus $u(1, 2) + du = -1 - 0.13 = -1.13$.

Opgave 3. *(6 punten)*
De functie f is op $\mathbb{R}^2$ gegeven door $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 2xy$.

(i) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek $(x, y, f(x, y))$ van $f(x, y)$ in het punt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(ii) Bepaal de kritieke punten van $f(x, y)$.

(iii) Geef telkens aan of de in (ii) gevonden kritieke punten lokale minima, lokale maxima of zadelpunten van $f(x, y)$ zijn.

(iv) Ga ook na of $f(x, y)$ globale minima of globale maxima heeft.

Oplossing:

(i) **(1 punt)** De grafiek van f is het niveauoppervlak $g(x, y, z) = 0$ voor de functie $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. De gradiënt staat loodrecht op een niveauoppervlak en er geldt $\nabla g = (2xy - 2y^2 + 2y, x^2 - 4xy + 2x, -1)$, in het punt $(1, 1)$ geeft dit de normaalvector $(2, -1, -1)$.

De vergelijking van het raakvlak is dus van de vorm $2x - y - z = c$. Omdat $f(1, 1) = 1$ is, ligt het punt $(1, 1, 1)$ in het raakvlak, daarom is $c = 0$, d.w.z. de vergelijking is $2x - y - z = 0$.

(ii) **(2 punten)** De partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y^2 + 2y = 2y(x - y + 1) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4xy + 2x = x(x - 4y + 2).$$

Uit $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ volgt $y = 0$ of $x = y - 1$, Uit $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ volgt $x = 0$ of $x = 4y - 2$. Combineren van $y = 0$ en $x = 0$ geeft het kritieke punt $(0, 0)$, combineren van $y = 0$ en $x = 4y - 2$ geeft het kritieke punt $(-2, 0)$, combineren van $x = y - 1$ en $x = 0$ geeft het kritieke punt $(0, 1)$, en combineren van $x = y - 1$ en $x = 4y - 2$ geeft $y - 1 = 4y - 2$, dus $3y = 1$ en dit geeft het kritieke punt $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Er zijn dus vier kritieke punten: $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ en $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

(iii) **(2 punten)** De tweede partiële afgeleiden zijn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 2x - 4y + 2$, de algemene vorm van de Hesse matrix is dus

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 4y + 2 \\ 2x - 4y + 2 & -4x \end{pmatrix}.$$

De Hesse matrix in het punt $(0, 0)$ is $\mathcal{H}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en wegens $\det \mathcal{H}_{(0,0)} = -4 < 0$ is dit een zadelpunt (want $\mathcal{H}_{(0,0)}$ heeft een positieve en een negatieve eigenwaarde).

De Hesse matrix in het punt $(-2, 0)$ is $\mathcal{H}_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ en wegens $\det \mathcal{H}_{(-2,0)} = -4 < 0$ is ook dit een zadelpunt.

De Hesse matrix in het punt $(0, 1)$ is $\mathcal{H}_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ en wegens $\det \mathcal{H}_{(0,1)} = -4 < 0$ is ook dit een zadelpunt.

De Hesse matrix in het punt $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ is $\mathcal{H}_{(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ en wegens $\det \mathcal{H}_{(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})} = \frac{4}{3} > 0$ en $\frac{2}{3} > 0$ is dit een lokaal minimum.

(iv) **(1 punt)** De functie heeft geen globale maxima en minima, want op de lijn $x = y$ is $f(x, x) = -x^3 + 2x^2$ en we hebben $\lim_{x \to +\infty} f(x, x) = -\infty$ en $\lim_{x \to -\infty} f(x, x) = \infty$.

Opgave 4. *(5 punten)*
Zij S het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ dat gegeven is door de vergelijking

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35.$$

(i) Bepaal de maximale en de minimale waarde van de z-coördinaat die een punt (x, y, z) op S heeft.

(ii) Bepaal de normaalvector op het oppervlak S in een punt met maximale z-coördinaat.

Oplossing:

(i) **(3 punten)** We zoeken de extreme waarden van de functie $f(x, y, z) = z$ onder de randvoorwaarde $g(x, y, z) = 0$ voor $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 35$. Er geldt

$$\nabla f = (0, 0, 1) \quad \text{en} \quad \nabla g = (4x - 12y + 4z, -12x + 6y, 4x + 2z)$$

en volgens de methode van Lagrange multiplicatoren moet in een extreme waarde van f onder de randvoorwaarde $g = 0$ gelden dat $\nabla f = \lambda \nabla g$.

Uit de derde component volgt dat $\lambda \neq 0$, dus moet gelden dat

$$4x - 12y + 4z = 0 \quad \text{en} \quad -12x + 6y = 0.$$

Elimineren van x (3 keer de eerste plus de tweede vergelijking) geeft $-30y + 12z = 0$, dus $y = \frac{2}{5}z$. Elimineren van y (eerste plus 2 keer de tweede vergelijking) geeft $-20x + 4z = 0$, dus $x = \frac{1}{5}z$. Invullen hiervan in $g(x, y, z) = 0$ geeft dan $(\frac{2}{25} + \frac{12}{25} + 1 - \frac{24}{25} + \frac{4}{5})z^2 - 35 = 0$, d.w.z. $\frac{2+12+25-24+20}{25}z^2 = 35$, dus $\frac{35}{25}z^2 = 35$, dus $z = \pm 5$.

De punten op S met extreme z-coördinaat zijn dus $(1, 2, 5)$ en $(-1, -2, -5)$.

(ii) **(2 punten)** Het gegeven oppervlak S is het niveauoppervlak $g(x, y, z) = 0$ van de functie $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 35$. De gradiënt $\nabla g = (4x - 12y + 4z, -12x + 6y, 4x + 2z)$ van g staat loodrecht op het niveauoppervlak, we hebben $\nabla g_{|(1,2,5)} = (0, 0, 14)$ en $\nabla g_{|(-1,-2,-5)} = (0, 0, -14)$, dus wijst de normaalvector telkens in de richting van de z-as.

In feite is het juist de basis van de methode van Lagrange multiplicatoren dat ∇f en ∇g in een extreme waarde van f onder de randvoorwaarde g parallel zijn, en omdat ∇f in de richting van de z-as wijst geldt dit ook voor de de gradiënt van g, die parallel is met de normaalvector op S.

Opgave 5. *(4 punten)*
Voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ is een vectorveld F gegeven door

$$F(x, y, z) = \left(a\, x \ln z,\ b\, y^2 z,\ c\,(\frac{x^2}{z} + y^3)\right),$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ parameters zijn.

(i) Bepaal a, b en c zo dat $F(x, y, z)$ een conservatief veld is.

(ii) Geef expliciet een potentiaalfunctie $\phi(x, y, z)$ van F aan, d.w.z. een functie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die voldoet aan $F = \nabla\phi$.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** We testen de noodzakelijke voorwaarden voor het bestaan van een potentiaalfunctie:
$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$ en $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$, dus geldt $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ altijd;
$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{ax}{z}$ en $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{2cx}{z}$, dus moet gelden dat $a = 2c$;
$\frac{\partial F_2}{\partial z} = by^2$ en $\frac{\partial F_3}{\partial y} = 3cy^2$, dus moet gelden dat $b = 3c$.
Het vectorveld F is dus conservatief als het van de form

$$F(x, y, z) = c\left(2x \ln z,\ 3y^2 z,\ \frac{x^2}{z} + y^3\right)$$

is voor $c \in \mathbb{R}$.

(ii) **(2 punten)** We laten de parameter c buiten beschouwing, als ϕ een potentiaalfunctie van F is, is $c\phi$ een potentiaalfunctie van cF.

Integreren van F_1 met betrekking tot x geeft $\phi(x, y, z) = x^2 \ln z + f(y, z)$, integreren van F_2 met betrekking tot y geeft $\phi(x, y, z) = y^3 z + g(x, z)$ en integreren van F_3 met betrekking tot z geeft $\phi(x, y, z) = x^2 \ln z + y^3 z + h(x, y)$.

Hieruit volgt dat $\phi(x, y, z) = x^2 \ln z + y^3 z + C$ een potentiaalfunctie van F is.