

Tentamen Calculus 3 (kans B)

Opgave 1. (4 punten)

Een deeltje beweegt voor $t \geq 0$ op het pad

$$\mathbf{c}(t) = \left\{ (t \sin(t), t \cos(t), \frac{\sqrt{8}}{3} t^{\frac{3}{2}}) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0 \right\}.$$

- (i) Geef voor het tijdstip $t_0 = \pi$ de positie, de snelheid en de richtingsvector van de beweging van het deeltje aan.
- (ii) Bepaal voor $T > 0$ de lengte van het pad dat het deeltje in het tijdsinterval $0 \leq t \leq T$ aflegt.
- (iii) Stel op tijdstip $t_0 = \pi$ verdwijnt de kracht die het deeltje op zijn pad dwingt. Vanaf dit tijdstip zal het deeltje met constante snelheid en richting bewegen.
Wat zijn de coördinaten van het deeltje op tijdstip $t_1 = 2\pi$?

Opgave 2. (6 punten)

De variabelen x, y en u, v zijn gerelateerd door de vergelijkingen

$$x = u^3 - uv \quad \text{en} \quad y = 3uv + 2v^2.$$

- (i) Laat zien dat zich u en v in een omgeving van het punt $(u_0, v_0) = (-1, 2)$ als functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$ laten schrijven.
- (ii) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial u}{\partial y}$ in het punt $(u_0, v_0) = (-1, 2)$.
- (iii) Bepaal een benadering van $u(1.02, 1.97)$.

Opgave 3. (6 punten)

De functie f is op \mathbb{R}^2 gegeven door $f(x, y) = x^2y - 2xy^2 + 2xy$.

- (i) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek $(x, y, f(x, y))$ van $f(x, y)$ in het punt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
- (ii) Bepaal de kritieke punten van $f(x, y)$.
- (iii) Geef telkens aan of de in (ii) gevonden kritieke punten lokale minima, lokale maxima of zadelpunten van $f(x, y)$ zijn.
- (iv) Ga ook na of $f(x, y)$ globale minima of globale maxima heeft.

z.o.z. voor Opgaven 4 en 5

Opgave 4. (5 punten)

Zij S het oppervlak in \mathbb{R}^3 dat gegeven is door de vergelijking

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35.$$

- (i) Bepaal de maximale en de minimale waarde van de z -coördinaat die een punt (x, y, z) op S heeft.
- (ii) Bepaal de normaalvector op het oppervlak S in een punt met maximale z -coördinaat.

Opgave 5. (4 punten)

Voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ is een vectorveld F gegeven door

$$F(x, y, z) = \left(ax \ln z, by^2z, c\left(\frac{x^2}{z} + y^3\right) \right),$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ parameters zijn.

- (i) Bepaal a, b en c zo dat $F(x, y, z)$ een conservatief veld is.
- (ii) Geef expliciet een potentiaalfunctie $\phi(x, y, z)$ van F aan, d.w.z. een functie $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan $F = \nabla\phi$.

Succes ermee!