

Tentamen Calculus 3 (kans A)

Opgave 1. (7 punten)

Een deeltje beweegt voor $t > 0$ op het pad

$$c(t) = \{(2t, t^2, \log t) \in \mathbb{R}^3 \mid t > 0\}.$$

- (i) Geef voor het tijdstip $t_1 = 1$ de positie, de snelheid en de richtingsvector van de beweging van het deeltje aan.
- (ii) Bepaal het tijdstip t_0 waarop het deeltje minimale snelheid heeft en geef deze snelheid aan.
- (iii) Bepaal de lengte van het pad dat het deeltje in het tijdsinterval $1 \leq t \leq 2$ aflegt.
Hint: $(t + t^{-1})^2 = t^2 + 2 + t^{-2}$.
- (iv) Stel op tijdstip $t_2 = 2$ verdwijnt de kracht die het deeltje op zijn pad dwingt. Vanaf dit tijdstip zal het deeltje met constante snelheid in zijn bewegingsrichting op het tijdstip t_2 vliegen (zonder wrijving en externe krachten).

Wat zijn de coördinaten van het deeltje op tijdstip $t_3 = 3$ en wat is zijn snelheid op dit tijdstip?

Oplossing: NB: Met $\log t$ is natuurlijk de *natuurlijke* logaritme bedoeld, zo als ook altijd tijdens het hoorcollege.

- (i) **(1.5 punten)** De positie op $t_1 = 1$ is $c(1) = (2, 1, 0)$. Voor de snelheid en de richtingsvector is de afgeleide $c'(t)$ nodig, die is $c'(t) = (2, 2t, 1/t)$. Op $t_1 = 1$ is dit $(2, 2, 1)$, dit is de richtingsvector op dit tijdstip. De snelheid op $t_1 = 1$ is $\|c'(t)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.
- (ii) **(2 punten)** Voor het gemak minimaliseren we $v(t)^2 = \|c'(t)\|^2 = 4 + 4t^2 + 1/t^2$. Er geldt $(v(t)^2)' = 8t - 2/t^3$ en dit heeft een kritiek punt voor $8t = 2/t^3$, dus voor $t^4 = 1/4$ oftewel $t = 1/\sqrt{2}$ (we weten dat $t > 0$ moet zijn). De snelheid voor $t = 1/\sqrt{2}$ is $\sqrt{4 + 2 + 2} = \sqrt{8}$. Omdat dit het enige kritieke punt is, moet het een minimum zijn, want $v(t) \rightarrow \infty$ voor $t \rightarrow 0$ en $t \rightarrow \infty$ en $v(t)$ is continu op $(0, \infty)$.
- (iii) **(2 punten)** De lengte van het pad is $\int_1^2 \|c'(t)\| dt = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + 1/t^2} dt = \int_1^2 \sqrt{(2t + 1/t)^2} dt = \int_1^2 (2t + 1/t) dt = (t^2 + \log t)|_1^2 = (4 + \log 2) - 1 = 3 + \log 2$.
- (iv) **(1.5 punten)** Positie op $t_2 = 2$ is $c(2) = (4, 4, \log 2)$, richtingsvector op dit tijdstip is $c'(2) = (2, 4, 1/2)$, snelheid is dus $\sqrt{4 + 16 + 1/4} = 9/2$ en dit is ook de snelheid op $t_3 = 3$. Positie op $t_3 = 3$ is $c(2) + 1 \cdot c'(2) = (6, 8, \log 2 + 1/2)$.

Opgave 2. (7 punten)

De poolcoördinaten in het vlak zijn gegeven door $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$.

(i) Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$.

Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial r}$ en $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ van f met betrekking tot de poolcoördinaten.

Druk de partiële afgeleiden hierbij uit in de poolcoördinaten r en θ .

(ii) Laat zien dat voor een willekeurige differentieerbare functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de partiële afgeleiden met betrekking tot de Cartesische coördinaten x, y en tot de poolcoördinaten r, θ voldoen aan

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$$

(iii) De gewone Cartesische coördinaten x, y laten zich ook uitdrukken in nieuwe coördinaten s, t met $x = s^2 + 2t$ en $y = t^2 - 2s$ (onder de voorwaarde $rs \neq 1$, zie opgaven).

Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial r}{\partial s}$ en $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ tussen de poolcoördinaten en deze nieuwe coördinaten.

Druk de partiële afgeleiden hierbij uit in de betrokken coördinaten s, t, r en θ .

Oplossing:

(i) **(2 punten)** Dit kan door de poolcoördinaten voor x en y te substitueren, dit geeft $f(r, \theta) = r^3 \cos^3 \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta + r^3 \sin^3 \theta$ en de partiële afgeleiden zijn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= 3r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - 2r \cos \theta \sin \theta \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 3r^3 \cos \theta \sin \theta (-\cos \theta + \sin \theta) + r(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Alternatief: Volgens de kettingregel is $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (3x^2 - y) \cos \theta + (-x + 3y^2) \sin \theta = (3r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) \cos \theta + (-r \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) \sin \theta$.

Analoog is $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = (3x^2 - y)(-r \sin \theta) + (-x + 3y^2)r \cos \theta = (3r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta)(-r \sin \theta) + (-r \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta)r \cos \theta$.

(ii) **(2 punten)** Er geldt $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial y} \sin \theta$, dus $(\frac{\partial g}{\partial r})^2 = (\frac{\partial g}{\partial x})^2 \cos^2 \theta + (\frac{\partial g}{\partial y})^2 \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \cos \theta \sin \theta$.

Analoog is $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial g}{\partial y} (r \cos \theta)$, dus $(\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta})^2 = (\frac{\partial g}{\partial x})^2 \sin^2 \theta + (\frac{\partial g}{\partial y})^2 \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \sin \theta \cos \theta$.

Wegens $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ volgt hieruit dat $(\frac{\partial g}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta})^2 = (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2$.

(iii) **(3 punten)** De Jacobi matrix J_1 voor de transformatie op poolcoördinaten r, θ is

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De omgekeerde partiële afgeleiden zijn dan de elementen in de inverse matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = J_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De Jacobi matrix J_2 voor de transformatie op de nieuwe coördinaten s, t is

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & 2 \\ -2 & 2t \end{pmatrix}.$$

De transformatie van poolcoördinaten op de nieuwe coördinaten heeft als Jacobi matrix het product $J_1^{-1} \cdot J_2$ want $\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$ enz. Hieruit volgt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s & 2 \\ -2 & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \cos \theta - 2 \sin \theta & 2 \cos \theta + 2t \sin \theta \\ -\frac{2s}{r} \sin \theta - \frac{2}{r} \cos \theta & -\frac{2}{r} \sin \theta + \frac{2t}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Voor de twee gevraagde partiële afgeleiden geeft dit (kan natuurlijk ook zonder matrix product)

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 2s \cos \theta - 2 \sin \theta$$

en

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{2}{r} \sin \theta + \frac{2t}{r} \cos \theta.$$

Opgave 3. (6 punten)

Zij $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3yz^3$.

- (i) Bepaal een normaalvector op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 9$ in een punt van de vorm $(x_0, y_0, 0)$.
- (ii) Onder welke voorwaarden aan x_0, y_0, z_0 laat zich de variabele z op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 9$ in een omgeving van het punt (x_0, y_0, z_0) als functie $z = g(x, y)$ uitdrukken?
- (iii) Controleer dat zich z op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 9$ in een omgeving van het punt $(1, 0, 1)$ inderdaad als functie $z = g(x, y)$ laat schrijven.
Geef met behulp van de linearisering van $g(x, y)$ een benadering van de functiewaarde $g(0.9, 0.1)$.

Oplossing:

- (i) **(2 punten)** De gradiënt staat loodrecht op de niveauoppervlakken, er geldt

$$\nabla f = (3x^2 + 8z^2, 6y - 3z^3, 16xz - 9yz^2)$$

en voor $z = 0$ is dit $\nabla f(x_0, y_0, 0) = (3x_0^2, 6y_0, 0)$. Een normaalvector is dus van de vorm $(x_0^2, 2y_0, 0)$. Deze vector is niet nul, want voor $x_0 = y_0 = 0$ ligt $(x_0, y_0, 0)$ niet op het niveauoppervlak $x_0^3 + 3y_0^2 = 9$.

- (ii) **(1 punt)** Zo'n functie g bestaat als $\partial f / \partial z \neq 0$, dus als $16xz - 9yz^2 = z(16x - 9yz) \neq 0$, d.w.z. als $z \neq 0$ en $16x \neq 9yz$.

(iii) **(3 punten)** In het punt $(1, 0, 1)$ geldt inderdaad $16xz - 9yz^2 = 16 \neq 0$.

Voor de linearisering van $g(x, y)$ moeten we de partiële afgeleiden $\partial g / \partial x$ en $\partial g / \partial y$ berekenen. Er geldt $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial z}$ en in het punt $(1, 0, 1)$ geeft dit $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = -\frac{3x^2 + 8z^2}{16xz - 9yz^2}|_{(1,0,1)} = -\frac{11}{16}$. Analoog is $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial z}$ en dit geeft $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -\frac{6y - 3z^3}{16xz - 9yz^2}|_{(1,0,1)} = -\frac{3}{16} = \frac{3}{16}$.

De linearisering van $g(x, y)$ rond het punt $(1, 0)$ is dus

$$L(x, y) = g(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)y = 1 - \frac{11}{16}(x - 1) + \frac{3}{16}y.$$

Voor het punt $(0.9, 0.1)$ geeft dit $g(0.9, 0.1) \approx L(0.9, 0.1) = 1 + 11/160 + 3/160 = 1 + 7/80 = 1.0875$.

Opgave 4. (10 punten)

De functie $f(x, y, z)$ is gegeven door $f(x, y, z) = 2 + xz + y^2$ voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Verder zij $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ het boloppervlak van straal $\sqrt{3}$ rond de oorsprong.

- Wat is de richting van de grootste stijging van $f(x, y, z)$ vanuit het noordpool $N = (0, 0, \sqrt{3})$ van S ?
- Bepaal de kritieke punten van f en geef telkens aan of het lokale minima, lokale maxima of zadelpunten van $f(x, y, z)$ zijn.
- Bepaal de minimale en de maximale waarden van $f(x, y, z)$ op het boloppervlak S en geef alle punten aan waar deze extreme waarden aangenomen worden.
- Wat is de maximale straal R van een bol $B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ zo dat $f(x, y, z) \geq 0$ voor alle $(x, y, z) \in B_R$? Licht je antwoord toe.

Oplossing:

- (1 punt)** De gradiënt geeft de richting van de grootste stijging, er geldt $\nabla f = (z, 2y, x)$ en in het noordpool is dit $\nabla f(0, 0, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}, 0, 0)$.
- (2 punten)** Voor een kritiek punt moet gelden dat $\nabla f = (0, 0, 0)$, dit is alleen het geval voor $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Er geldt $f(0, 0, 0) = 2$, maar voor willekeurig kleine $x \neq 0$ is $f(x, 0, 0) = 2 + x^2 > 2$ terwijl $f(x, 0, -x) = 2 - x^2 < 2$, dus is $(0, 0, 0)$ een zadelpunt.

Dit laat zich natuurlijk ook via de Hesse matrix concluderen, deze is $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(onafhankelijk van x, y, z) en heeft eigenwaarden 2, 1 en -1 .

- (4 punten)** Dit laat zich in principe door invullen van $y^2 = 3 - x^2 - z^2$ in het functievoorschrift oplossen, er moet dan wel aandacht worden besteed aan de randgevallen $y^2 = 0$ en $y^2 = 3$. We geven daarom de voorkeur aan de methode van Lagrange multiplicatoren.

Kies $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, dan is $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ en voor een extreme waarde onder de randvoorwaarde $g = 0$ geldt $\nabla f = \lambda \nabla g$. Dit geeft het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} z &= 2\lambda x \\ 2y &= 2\lambda y \\ x &= 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3. \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt $y = 0$ of $\lambda = 1$. Als $y \neq 0$ is dus $z = 2x$ en $x = 2z$, dit kan alleen maar voor $x = z = 0$. Wegens $g = 0$ (vierde vergelijking) is dan $y = \pm\sqrt{3}$. Dit geeft de punten $P_1 = (0, \sqrt{3}, 0)$ en $P_2 = (0, -\sqrt{3}, 0)$.

Voor $y = 0$ geeft invullen van $x = 2\lambda z$ in de eerste vergelijking dat $x = 4\lambda^2 z$. Als $x = 0$ zou ook $z = 0$ gelden, maar dan voldoet $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ niet aan $g = 0$. Dus is $x \neq 0$ en dus $4\lambda^2 = 1$, d.w.z. $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Invullen in de eerste en derde vergelijking geeft $x = \pm z$. Weer met invullen in $g = 0$ geeft dit de vier oplossingen $P_3 = (\sqrt{3/2}, 0, \sqrt{3/2})$, $P_4 = (\sqrt{3/2}, 0, -\sqrt{3/2})$, $P_5 = (-\sqrt{3/2}, 0, \sqrt{3/2})$ en $P_6 = (-\sqrt{3/2}, 0, -\sqrt{3/2})$.

Invullen van de gevonden punten geeft de functiewaarden $f(P_1) = f(P_2) = 5$, $f(P_3) = f(P_6) = 2 + \frac{3}{2} = 3.5$ en $f(P_4) = f(P_5) = 2 - \frac{3}{2} = 0.5$. De minimale waarde van f op S is dus 0.5 en wordt in P_4 en P_5 aangenomen, de maximale waarde is 5 en wordt in P_1 en P_2 aangenomen.

- (iv) **(3 punten)** We hebben gezien dat f in $\mathbb{R}^3$ geen lokale minima en maxima heeft, dus wordt voor een bol van straal R de minimale waarde op de rand aangenomen. We moeten dus een straal R vinden zo dat het minimum op het oppervlak van de bol B_R juist de waarde 0 heeft.

Met dezelfde berekening als in deel (iii) vinden we kritieke punten voor $y \neq 0$ en $x = z = 0$, dan moet $y = \pm R$ zijn, maar in deze punten is $f(0, \pm R, 0) = 2 + R^2 > 2 = f(0, 0, 0)$, dus komen deze punten niet in aanmerking.

Ook analoog met deel (iii) zijn de andere kritieke punten van de vorm $(\pm x, 0, \pm x)$ en de randvoorwaarde $g = 0$ geeft $2x^2 = R^2$, dus $x = \pm R/\sqrt{2}$. Het is duidelijk dat voor een minimum $xz < 0$ moet gelden, dan is $z = -x$ en dus is $f(R/\sqrt{2}, 0, -R/\sqrt{2}) = 2 - R^2/2$. De minimale waarde is dus gelijk aan 0 voor $R^2 = 4$, dus $R = 2$.

Hiermee is ook duidelijk dat voor grotere waarden van R de minimale waarde negatief wordt, want voor $R > 2$ is $f(R/\sqrt{2}, 0, -R/\sqrt{2}) = 2 - R^2/2 < 0$.

Opgave 5. (6 punten)

Een vector veld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heet *conservatief* als er een potentiaalfunctie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat zo dat $F = \nabla f$.

- Laat zien dat $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$ geen conservatief veld is.
- Vind een vector veld van de vorm $G(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, y \cdot h(x, z))$ dat wel conservatief is, waarbij $h(x, z)$ een reëelwaardige functie van x en z is.
- Geef voor de in deel (ii) gevonden functie $G(x, y, z)$ expliciet een potentiaalfunctie $g(x, y, z)$ aan die voldoet aan $G = \nabla g$ en $g(0, 0, 0) = 0$.

Oplossing:

- (i) **(2 punten)** We schrijven F_1 , F_2 en F_3 voor de componenten van F . Als F conservatief is, zou gelden dat $F_2 = \partial f / \partial y$ en $F_3 = \partial f / \partial z$. Wegens de gelijkheid van de gemengde partiële afgeleiden van orde 2 geldt dan $\partial F_2 / \partial z = \partial^2 f / (\partial y \partial z) = \partial F_3 / \partial y$. Maar $\partial F_2 / \partial z = 2z$ terwijl $\partial F_3 / \partial y = 1$, dus kan F niet conservatief zijn.
- (ii) **(2 punten)** Met het argument uit deel (i) moet gelden dat $\partial G_1 / \partial y = \partial G_2 / \partial x$ en dat is inderdaad het geval. Verder moet gelden dat $\partial G_1 / \partial z = \partial G_3 / \partial x$ en wegens $\partial G_1 / \partial z = 0$ betekent dit dat h niet van x afhangt, dus is G_3 van de vorm $y h(z)$. Wegens $\partial G_2 / \partial z = 2z$ moet gelden dat $2z = \partial G_3 / \partial y = h(z)$, d.w.z. de gezochte functie is $G(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$.
- (iii) **(2 punten)** Uit de eerste component volgt (door integreren met betrekking tot x) dat $g(x, y, z) = x^2 y + h(y, z)$. Partieel afleiden naar y geeft dan $x^2 + z^2 = \partial g / \partial y = x^2 + \partial h / \partial y$, dus is $h(y, z)$ van de vorm $h(y, z) = yz^2 + \tilde{h}(z)$. Partieel afleiden van $g(x, y, z) = x^2 y + yz^2 + \tilde{h}(z)$ naar z geeft nu $2yz = \partial g / \partial z = 2yz + \tilde{h}'(z)$, dus $\tilde{h}(z) = c$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$. De functie $g(x, y, z) = x^2 y + z^2 y + c$ is dus een potentiaalfunctie en voor $c = 0$ voldoet deze aan $g(0, 0, 0) = 0$.