

Tentamen Calculus 3 (kans A)

Opgave 1. (7 punten)

Een deeltje beweegt voor $t > 0$ op het pad

$$c(t) = \{(2t, t^2, \log t) \in \mathbb{R}^3 \mid t > 0\}.$$

- (i) Geef voor het tijdstip $t_1 = 1$ de positie, de snelheid en de richtingsvector van de beweging van het deeltje aan.
- (ii) Bepaal het tijdstip t_0 waarop het deeltje minimale snelheid heeft en geef deze snelheid aan.
- (iii) Bepaal de lengte van het pad dat het deeltje in het tijdsinterval $1 \leq t \leq 2$ aflegt.
Hint: $(t + t^{-1})^2 = t^2 + 2 + t^{-2}$.
- (iv) Stel op tijdstip $t_2 = 2$ verdwijnt de kracht die het deeltje op zijn pad dwingt. Vanaf dit tijdstip zal het deeltje met constante snelheid in zijn bewegingsrichting op het tijdstip t_2 vliegen (zonder wrijving en externe krachten).

Wat zijn de coördinaten van het deeltje op tijdstip $t_3 = 3$ en wat is zijn snelheid op dit tijdstip?

Opgave 2. (7 punten)

De poolcoördinaten in het vlak zijn gegeven door $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$.

- (i) Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$.

Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial r}$ en $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ van f met betrekking tot de poolcoördinaten.

Druk de partiële afgeleiden hierbij uit in de poolcoördinaten r en θ .

- (ii) Laat zien dat voor een willekeurige differentieerbare functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de partiële afgeleiden met betrekking tot de Cartesische coördinaten x, y en tot de poolcoördinaten r, θ voldoen aan

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$$

- (iii) De gewone Cartesische coördinaten x, y laten zich ook uitdrukken in nieuwe coördinaten s, t met $x = s^2 + 2t$ en $y = t^2 - 2s$ (onder de voorwaarde $rs \neq 1$, zie opgaven).

Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial r}{\partial s}$ en $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ tussen de poolcoördinaten en deze nieuwe coördinaten.

Druk de partiële afgeleiden hierbij uit in de betrokken coördinaten s, t, r en θ .

Opgave 3. (6 punten)

Zij $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3yz^3$.

- (i) Bepaal een normaalvector op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 9$ in een punt van de vorm $(x_0, y_0, 0)$.
- (ii) Onder welke voorwaarden aan x_0, y_0, z_0 laat zich de variabele z op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 9$ in een omgeving van het punt (x_0, y_0, z_0) als functie $z = g(x, y)$ uitdrukken?
- (iii) Controleer dat zich z op het niveauoppervlak $f(x, y, z) = 9$ in een omgeving van het punt $(1, 0, 1)$ inderdaad als functie $z = g(x, y)$ laat schrijven.
Geef met behulp van de linearisering van $g(x, y)$ een benadering van de functiewaarde $g(0.9, 0.1)$.

Opgave 4. (10 punten)

De functie $f(x, y, z)$ is gegeven door $f(x, y, z) = 2 + xz + y^2$ voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Verder zij $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ het boloppervlak van straal $\sqrt{3}$ rond de oorsprong.

- (i) Wat is de richting van de grootste stijging van $f(x, y, z)$ vanuit het noordpool $N = (0, 0, \sqrt{3})$ van S ?
- (ii) Bepaal de kritieke punten van f en geef telkens aan of het lokale minima, lokale maxima of zadelpunten van $f(x, y, z)$ zijn.
- (iii) Bepaal de minimale en de maximale waarden van $f(x, y, z)$ op het boloppervlak S en geef alle punten aan waar deze extreme waarden aangenomen worden.
- (iv) Wat is de maximale straal R van een bol $B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ zo dat $f(x, y, z) \geq 0$ voor alle $(x, y, z) \in B_R$? Licht je antwoord toe.

Opgave 5. (6 punten)

Een vector veld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heet *conservatief* als er een potentiaalfunctie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat zo dat $F = \nabla f$.

- (i) Laat zien dat $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$ geen conservatief veld is.
- (ii) Vind een vector veld van de vorm $G(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, y \cdot h(x, z))$ dat wel conservatief is, waarbij $h(x, z)$ een reëelwaardige functie van x en z is.
- (iii) Geef voor de in deel (ii) gevonden functie $G(x, y, z)$ expliciet een potentiaalfunctie $g(x, y, z)$ aan die voldoet aan $G = \nabla g$ en $g(0, 0, 0) = 0$.