

Proeftentamen Calculus 3

Opgave 1. (? punten)

Een deeltje beweegt in het tijdsinterval $[0, 2\pi]$ volgens de parametrisering

$$c(t) = \{(t + \sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

- (i) Bepaal de lengte van het pad van het deeltje.
- (ii) Ga na of het pad in alle punten glad is.
- (iii) Bepaal de maximale snelheid van het deeltje op zijn pad.
- (iv) Geef alle punten op het pad aan, waar het deeltje precies met de helft van de maximale snelheid beweegt.

Hint: Er geldt $\cos t = -1 + 2 \cos^2 \frac{t}{2}$ en $\cos t \sin t = 2 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}$. Verder is $\cos(60^\circ) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Opgave 2. (? punten)

Een functie $f(x, y)$ heet *harmonisch* als $f(x, y)$ aan de Laplace vergelijking $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ voldoet.

- (i) Laat zien dat $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ een harmonische functie is.
- (ii) Volgens een opgave zijn twee functies $f(x, y)$ en $g(x, y)$ harmonisch, als ze aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ en $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ voldoen.
Vind voor de functie $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ uit deel (i) een harmonische functie $g(x, y)$ zo dat $f(x, y)$ en $g(x, y)$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen.
- (iii) Onder welke voorwaarden aan de coëfficiënten A, B, C, D is de functie $f(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ harmonisch?

Opgave 3. (? punten)

Een coördinaat transformatie is gegeven door

$$x = r^2 + 2s, \quad y = s^2 - 2r.$$

- (i) In welke punten laten zich r en s als functies van x en y uitdrukken.
- (ii) Bepaal de partiële afgeleiden $\partial r / \partial x$, $\partial r / \partial y$, $\partial s / \partial x$ en $\partial s / \partial y$ in een algemeen punt waar de functies $r(x, y)$ en $s(x, y)$ volgens deel (i) bestaan.
- (iii) Stel een punt (x_0, y_0) is met een zekere onnauwkeurigheid bepaald door $x_0 = 5 \pm 0.02$ en $y_0 = 2 \pm 0.01$. Wat is dan de onnauwkeurigheid voor de corresponderende coördinaten $(r_0, s_0) = (1, 2)$.

Opgave 4. (? punten)

Zij $F(x, y, z) = x^3 z^2 - xyz^3$.

- (i) Laat zien dat op de niveaukromme $F(x, y, z) = 0$ de variabele z in een omgeving van het punt $(1, 1, 1)$ als functie $z = g(x, y)$ van x en y geschreven kan worden.
- (ii) Bepaal de Taylor benadering van graad 1 van $g(x, y)$ in het punt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Opgave 5. (? punten)

De functie $f(x, y, z)$ zij gegeven door $f(x, y, z) = xyz$ voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Verder zij E de ellipsoïde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108\}$.

- (i) Bepaal de minimale en de maximale waarden van $f(x, y, z)$ over de ellipsoïde E en geef alle punten aan waar deze extreme waarden aangenomen worden.
- (ii) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het niveauoppervlak van $f(x, y, z)$ in het punt $P = (5, 1/\sqrt{2}, 3)$ op de rand van de ellipsoïde.
- (iii) Wat is in het punt P uit deel (ii) de richtingsafgeleide van $f(x, y, z)$ in de richting van de lijn door de oorsprong en het punt P ?

Opgave 6. (? punten)

Zij $F(x, y)$ een functie van twee veranderlijken. Stel dat $F(x/y, z/y) = 0$ voor $z = g(x, y)$. Laat zien dat dan $x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = z$ geldt.