

Proeftentamen Calculus 3

Opgave 1. (? punten)

Een deeltje beweegt in het tijdsinterval $[0, 2\pi]$ volgens de parametrisering

$$c(t) = \{(t + \sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

- (i) Bepaal de lengte van het pad van het deeltje.
- (ii) Ga na of het pad in alle punten glad is.
- (iii) Bepaal de maximale snelheid van het deeltje op zijn pad.
- (iv) Geef alle punten op het pad aan, waar het deeltje precies met de helft van de maximale snelheid beweegt.

Hint: Er geldt $\cos t = -1 + 2 \cos^2 \frac{t}{2}$ en $\cos t \sin t = 2 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}$. Verder is $\cos(60^\circ) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Oplossing:

- (i) Voor de lengte van het pad geldt $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt$
 $= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt$
 $= 2 \int_0^{2\pi} |\cos \frac{t}{2}| dt = 4 \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt = 8 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 8.$
- (ii) Het pad is zeker glad als de snelheid $v = |c'(t)|$ niet nul is. Wegens $v^2 = (1 + \cos t)^2 + (-\sin t)^2 = 2 + 2 \cos t$ is $v^2 = 0$ alleen voor $\cos t = -1$, dus voor $t = \pi$. In het punt $t = \pi$ wordt de richtingscoëfficiënt $\frac{-\sin t}{1 + \cos t}$ van de raakvector een uitdrukking van de vorm $\frac{0}{0}$ en l'Hôpital geeft hiervoor $\frac{-\cos t}{-\sin t} = \cot t$. Maar de cotangens is in $t = \pi$ niet continu, hij heeft een sprong van $-\infty$ naar ∞ . Dit betekent dat $c(t)$ in $t = \pi$ niet glad is, bij benadering van links gaat de raakvector naar $(0, -1)$ en bij benadering van rechts naar $(0, 1)$.
- (iii) We hadden al gezien dat $v^2 = 2 + 2 \cos t$ is, dit is maximaal voor $t = 0$ en $t = 2\pi$, dus in de randpunten van het interval. Op deze punten is de snelheid $\sqrt{2 + 2} = 2$.
- (iv) Er moet dan gelden dat $v = 1$, dus ook $v^2 = 2 + 2 \cos t = 1$. Dit betekent dat $\cos t = -\frac{1}{2}$, dus $t = \pi - \pi/3$ en $t = \pi + \pi/3$.

Opgave 2. (? punten)

Een functie $f(x, y)$ heet *harmonisch* als $f(x, y)$ aan de Laplace vergelijking $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ voldoet.

- (i) Laat zien dat $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ een harmonische functie is.
- (ii) Volgens een opgave zijn twee functies $f(x, y)$ en $g(x, y)$ harmonisch, als ze aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ en $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ voldoen.
 Vind voor de functie $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ uit deel (i) een harmonische functie $g(x, y)$ zo dat $f(x, y)$ en $g(x, y)$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen.

- (iii) Onder welke voorwaarden aan de coëfficiënten A, B, C, D is de functie $f(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ harmonisch?

Oplossing:

- (i) Er geldt $\partial f/\partial x = 3x^2 - 3y^2$ en $\partial^2 f/\partial x^2 = 6x$. Verder is $\partial f/\partial y = -6xy$ en $\partial^2 f/\partial y^2 = -6x$, dus is f inderdaad harmonisch.
- (ii) Volgens de Cauchy-Riemann vergelijkingen moet gelden dat $\partial g/\partial y = \partial f/\partial x = 3x^2 - 3y^2$. Primitiveren met betrekking tot y geeft $g(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$. Dan geldt $\partial g/\partial x = 6xy + h'(x)$ en wegens $\partial f/\partial y = -6xy$ moet $h'(x) = 0$ zijn. De functie $g(x, y) = 3x^2y - y^3$ voldoet dus.
- (iii) Afleiden geeft $\partial f/\partial x = 3Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ en $\partial^2 f/\partial x^2 = 6Ax + 2By$. Analoog geldt $\partial f/\partial y = 3Dy^2 + 2Cyx + Bx^2$ en $\partial^2 f/\partial y^2 = 6Dy + 2Cx$. Uit $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = 0$ volgt dus $C = -3A$ en $B = -3D$.

Opgave 3. (? punten)

Een coördinaat transformatie is gegeven door

$$x = r^2 + 2s, \quad y = s^2 - 2r.$$

- (i) In welke punten laten zich r en s als functies van x en y uitdrukken.
- (ii) Bepaal de partiële afgeleiden $\partial r/\partial x$, $\partial r/\partial y$, $\partial s/\partial x$ en $\partial s/\partial y$ in een algemeen punt waar de functies $r(x, y)$ en $s(x, y)$ volgens deel (i) bestaan.
- (iii) Stel een punt (x_0, y_0) is met een zekere onnauwkeurigheid bepaald door $x_0 = 5 \pm 0.02$ en $y_0 = 2 \pm 0.01$. Wat is dan de onnauwkeurigheid voor de corresponderende coördinaten $(r_0, s_0) = (1, 2)$.

Oplossing:

- (i) Hiervoor moet de Jacobiaan $\det J$ van de (vectorwaardige) functie $F(r, s) = (x(r, s), y(r, s))$ ongelijk zijn aan 0. Er geldt $J = \begin{pmatrix} 2r & 2 \\ -2 & 2s \end{pmatrix}$ en dus $\det J = 4rs + 4 = 4(rs + 1)$. De coördinaten r, s laten zich dus als functies van x en y uitdrukken als $rs \neq -1$.
- (ii) De gevraagde partiële afgeleiden zijn de elementen van de inverse van de Jacobi matrix J uit deel (i): $J^{-1} = \frac{1}{2(rs+1)} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & r \end{pmatrix}$. Er geldt dus $\partial r/\partial x = \frac{s}{2(rs+1)}$, $\partial r/\partial y = \frac{-1}{2(rs+1)}$, $\partial s/\partial x = \frac{1}{2(rs+1)}$ en $\partial s/\partial y = \frac{r}{2(rs+1)}$.
- (iii) Er geldt $dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy = \frac{2}{6}(\pm 0.02) + \frac{-1}{6}(\pm 0.01)$, dus $-0.05/6 \leq dr \leq 0.05/6$. Analoog is $ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy = \frac{1}{6}(\pm 0.02) + \frac{1}{6}(\pm 0.01)$, dus $-0.03/6 \leq ds \leq 0.03/6$.

Opgave 4. (? punten)

Zij $F(x, y, z) = x^3z^2 - xyz^3$.

- (i) Laat zien dat op de niveaukromme $F(x, y, z) = 0$ de variabele z in een omgeving van het punt $(1, 1, 1)$ als functie $z = g(x, y)$ van x en y geschreven kan worden.
- (ii) Bepaal de Taylor benadering van graad 1 van $g(x, y)$ in het punt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Oplossing:

- (i) We moeten laten zien dat $\partial F / \partial z$ in het aangegeven punt niet 0 is. Er geldt $\partial F / \partial z = 2x^3z - 3xyz^2$ en dus $\partial F / \partial z(1, 1, 1) = -1 \neq 0$.
- (ii) Natuurlijk geldt $g(1, 1) = 1$. Verder is $\partial g / \partial x = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{3x^2z^2 - yz^3}{2x^3z - 3xyz^2}$, dus $\partial g / \partial x(1, 1) = -\frac{2}{-1} = 2$. Analoog is $\partial g / \partial y = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{-xz^3}{2x^3z - 3xyz^2}$, dus $\partial g / \partial y(1, 1) = -\frac{-1}{-1} = -1$. Hieruit volgt $g(x, y) = 1 + 2(x - 1) - (y - 1)$.

Opgave 5. (? punten)

De functie $f(x, y, z)$ zij gegeven door $f(x, y, z) = xyz$ voor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Verder zij E de ellipsoïde $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108\}$.

- (i) Bepaal de minimale en de maximale waarden van $f(x, y, z)$ over de ellipsoïde E en geef alle punten aan waar deze extreme waarden aangenomen worden.
- (ii) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het niveauoppervlak van $f(x, y, z)$ in het punt $P = (5, 1/\sqrt{2}, 3)$ op de rand van de ellipsoïde.
- (iii) Wat is in het punt P uit deel (ii) de richtingsafgeleide van $f(x, y, z)$ in de richting van de lijn door de oorsprong en het punt P ?

Oplossing:

- (i) De gradiënt van de functie is $\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix}$, dus is het enige inwendige kritieke punt de oorsprong $(0, 0, 0)$ met $f(0, 0, 0) = 0$.

Voor de punten op de rand gebruiken we de methode van Lagrange multiplicatoren, voor

$$g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 108 \text{ geldt } \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 18z \end{pmatrix} \text{ en uit } \nabla f = \lambda \nabla g \text{ volgen de}$$

vergelijkingen $yz = \lambda 2x$, $zx = \lambda 8y$, $xy = \lambda 18z$. Als een van x, y, z nul is, is ook $f(x, y, z) = 0$, deze punten laten we even buiten beschouwing. Dan geldt $\lambda = yz/(2x) = zx/(8y) = xy/(18z)$ en hieruit volgt $2x^2z = 8y^2z$, dus $x^2 = 4y^2$ en net zo $2x^2y = 18yz^2$, dus $x^2 = 9z^2$. Wegens $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$ op de rand geldt dus $3x^2 = 108$, dus $x = \pm 6$. Hiermee volgt $y = \pm 3$ en $z = \pm 2$. We hebben dus 8 kandidaten voor maxima en minima gevonden, in de vier punten $(6, 3, 2)$, $(6, -3, -2)$, $(-6, 3, -2)$ en $(-6, -3, 2)$ heeft f een maximum met waarde 36, in de andere vier punten $(-6, -3, -2)$, $(-6, 3, 2)$, $(6, -3, 2)$ en $(6, 3, -2)$ heeft f een minimum met waarde -36. De oorsprong en de punten waar een van x, y, z nul is, zijn dus geen extreme waarden.

(iii) De gradiënt is de normaalvector van het raakvlak aan een niveauoppervlak, in het gegeven

punt geldt $\nabla f(P) = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 15 \\ 5/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Het gegeven punt ligt natuurlijk in het raakvlak, er geldt

$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 15 \\ 5/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 15/\sqrt{2} = 45/\sqrt{2}$. Het raakvlak is dus gegeven door de vergelijking $3/\sqrt{2}x + 15y + 5/\sqrt{2}z = 45/\sqrt{2}$ (of $3x + 15\sqrt{2}y + 5z = 45$).

(iii) De vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ heeft norm $\sqrt{\frac{69}{2}}$, dus is $u = \sqrt{\frac{2}{69}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ de vector van norm 1 in

de gevraagde richting en de richtingsafgeleide is $\nabla f \cdot u = \sqrt{\frac{2}{69}} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 15 \\ 5/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1/\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{69}} \frac{45}{\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{69}}$.

Opgave 6. (? punten)

Zij $F(x, y)$ een functie van twee veranderlijken. Stel dat $F(x/y, z/y) = 0$ voor $z = g(x, y)$. Laat zien dat dan $x (\partial z / \partial x) + y (\partial z / \partial y) = z$ geldt.

Oplossing: Om verwarring te voorkomen, noteren we de partiële afgeleiden van F met betrekking tot de eerste en tweede variabele met F_1 en F_2 .

Afleiden van $F(x/y, z/y) = 0$ naar x en naar y geeft $F_1 \cdot \frac{1}{y} + F_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \partial z / \partial x = 0$ en $F_1 \cdot \frac{-x}{y^2} + F_2 \cdot \frac{-z}{y^2} + F_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \partial z / \partial y = 0$ (waarbij F_1 natuurlijk staat voor $F_1(x/y, z/y)$ en F_2 voor $F_2(x/y, z/y)$). Hieruit volgt $x \cdot \partial z / \partial x = -F_1 \cdot x / F_2$ en $y \cdot \partial z / \partial y = -F_1 \cdot (-x) / F_2 - F_2 \cdot (-z) / F_2$ en dus $x \cdot \partial z / \partial x + y \cdot \partial z / \partial y = z$.