Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 2 NWI-NP004B
22 januari 2015, 12.30–15.30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op elk vel uw naam en studentnummer.
In geval uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ scoort u minimaal $15H/10$ voor opgave 8.

---

1. Bepaal van de volgende reeksen of ze absoluut convergent, relatief convergent of divergent zijn:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\ln(n)} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+6}{4n^3\sqrt[3]{n}+8n\sqrt{n}+3n+16}$$

2. Bepaal of de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ absoluut convergent, relatief convergent of divergent is. Indien convergent, bepaal dan ook de waarde van de reeks.

3. Beschouw de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.

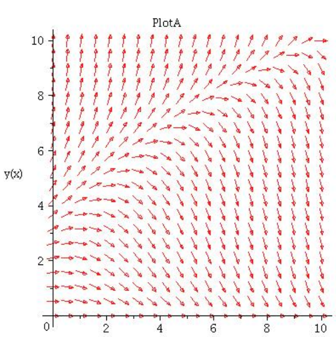
   (b) Bepaal het convergentiegedrag van de reeks in de randpunten van het convergentie-interval.

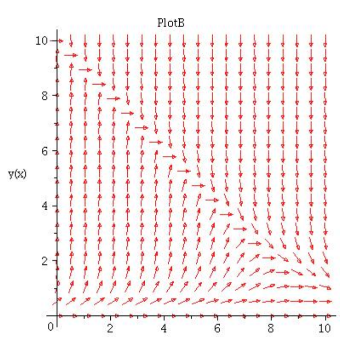
   (c) Bepaal de functie die deze machtreeksontwikkeling heeft.

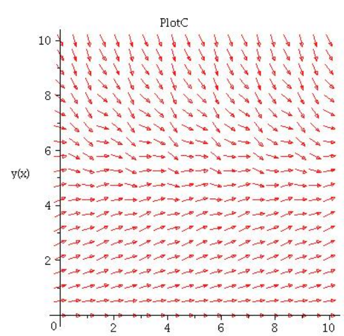
   (d) Bepaal de waarden van de reeks in de randpunten van het convergentie-interval in geval de reeks convergent is in het betreffende randpunt.

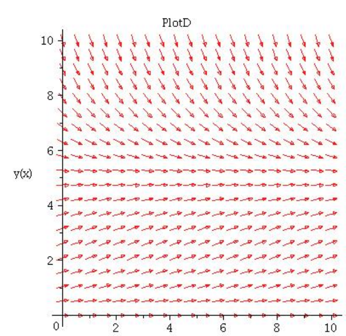
4. (a) Bepaal de oplossing van $\dfrac{dy}{dx} = y^3 x$ met beginwaarde $y(0) = 1$.

   (b) Bepaal de oplossing van $\dfrac{dy}{dx} + \cos(x)\,y = 2xe^{-\sin(x)}$ met beginwaarde $y(\pi) = 0$.









5. U ziet vier richtingenvelden voor eerste orde differentiaalvergelijkingen. Het antwoord op de volgende twee vragen is PlotA, PlotB, PlotC of PlotD.[1]

   (a) Welk differentiaalvergelijking heeft een constante oplossing $y(x) = C$ met $C > 0$?

   (b) Welk richtingenveld hoort bij $y' = 0.3y^2(10 - y - x)$?

6. Bepaal de algemene oplossing van $y'' - 4y' + 4y = 16xe^{-2x}$.

7. Beschouw de differentiaalvergelijking $y'' = (\frac{1}{4}x^2 + 4)y$. Veronderstel dat $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing als machtreeks rond 0 is.

   (a) Leid een recurrente betrekking af voor de coëfficiënten a_n. (Niet oplossen!)

   (b) Veronderstel dat de recurrente betrekking aanleiding geeft tot machtreeksen met positieve convergentiestraal. Wat is de dimensie van de ruimte van machtreeksoplossingen van deze differentiaalvergelijking?

8. [2] We beschouwen de veer $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t)$ (wet van Hooke), waarbij $x(t)$ de uitwijking ten opzichte van de ruststand is op tijdstip t, $m > 0$ (massa), $c \geq 0$ (wrijvingsconstante), $k > 0$ (veerconstante) en $f(t)$ een aandrijfterm is.

   (a) Veronderstel $c = 0$, en stel $\omega^2 = k/m$. Laat zien dat voor $f(t) = \cos(\omega t)$ de oplossing niet begrensd is (ofwel $x(t)$ wordt willekeurig groot voor voldoende grote t). Dit staat bekend als *resonantie*.

   (b) Bekijk nu weer de algemene differentiaalvergelijking voor x. Veronderstel bovendien dat f afkomstig van de beweging van een andere veer, omdat aan de veer nog een veer wordt gekoppeld. We veronderstellen dat f ook aan de wet van Hooke voldoet; $Mf''(t) + Cf'(t) + Kf(t) = 0$. Laat zien dat x voldoet aan een vierde-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

   (c) Veronderstel dat beide veren wrijvingsloos zijn, dus $c = C = 0$, en neem $m = 2$, $k = 8$, $M = \frac{1}{2}$, $K = 1$. Geef de algemene oplossing van de vierde orde differentiaalvergelijking voor x uit (b) voor deze keuze van de parameters.

   (d) Bepaal de oplossing x die voldoet aan de situatie als bij (c) met de beginvoorwaarden $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ en $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	Gratis	Totaal
Punten	10	8	14	14	8	14	7	15	10	100

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel huiswerkcijfer wordt meegenomen in de beoordeling van opgave 8.

[1] Alleen het antwoord telt. U hoeft geen argumentatie te geven.

[2] Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

We kijken steeds eerst of de reeks absoluut convergent is.

Voor de eerste reeks passen we het integraalkenmerk toe om te beslissen of $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ \ln(n)}$ absoluut convergent is. Dus we bekijken $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln(n)}$ en de daarbij horende integraal

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{R\to\infty} \int_3^{R} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\ln(3)}^{\ln(R)} \frac{1}{u}du =$$
$$\lim_{R\to\infty} \ln(u)\Big|_{\ln(3)}^{\ln(R)} = \lim_{R\to\infty} \ln(\ln(R)) - \ln(\ln(3))$$

en dit is divergent. Dus de reeks is niet absoluut convergent. Voor voorwaardelijke (of relatieve) convergentie, hebben we nog de alternerende reekstest. Stel $a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, dan is inderdaad $a_n \geq 0$ voor $n \geq 3$, en moeten we controleren of (1) $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle n, en (2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Het eerste volgt omdat $x\ln(x)$ een monotoon stijgende functie is voor $x \geq 3$, en omdat $x\ln(x)$ naar ∞ voor $x \to \infty$ divergeert volgt (2) ook. Dus de reeks is convergent met behulp van de alternerende reekstest. Dus de reeks is voorwaardelijk convergent.

Voor de laatste reeks stellen we

$$a_n = \frac{n^2+3n+6}{4n^3\sqrt[3]{n}+8n\sqrt{n}+3n+16}, \qquad b_n = \frac{n^2}{n^3\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{4/3}}$$

Merk op dat $a_n \geq 0$ en dat $b_n \geq 0$. Dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent of divergent. Dan weten we uit de p-reeks (of via het integraalkenmerk) dat $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent is, want $p = \frac{4}{3} > 1$. Verder geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+3n+6}{4n^3\sqrt[3]{n}+8n\sqrt{n}+3n+16}}{\frac{1}{n^{4/3}}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+4/3}+3n^{1+4/3}+6n^{4/3}}{4n^3\sqrt[3]{n}+8n\sqrt{n}+3n+16} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3n^{-1}+6n^{-2}}{4+8n^{-2+1/2-1/3}+3n^{-2-1/3}+16n^{-3-1/3}} = \frac{1}{4}$$

Dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent dan en slechts dan als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent is (vergelijkingskenmerk). Dus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent en dus absoluut convergent.

Opgave 2.

Merk op dat $n(n+2) \geq n^2$ en dus

$$|\frac{(-1)^n}{n(n+2)}| = \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

en omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is (p-reeks met $p = 2$ of integraalkenmerk), volgt dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ absoluut convergent is.

Om de waarde van de reeks te bepalen, merk op dat we met een telescopende reeks te maken hebben;

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

We splitsen de reeks in even en oneven termen; we hoeven niet naar de partiële sommen te kijken, omdat we al weten dat de reeks absoluut convergent is.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) + +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right) = -\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Opgave 3.

(a) Om de convergentiestraal te bepalen passen we het quotiëntenkenmerk toe.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{2^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}|x|^2 \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}|x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{2+3/n} = \frac{1}{2}|x|^2$$

Dus als $\frac{1}{2}|x|^2 < 1$ ofwel $|x|^2 < 2$ or $|x| < \sqrt{2}$ dan is de reeks absoluut convergent, en voor $|x| > \sqrt{2}$ is de reeks divergent. De convergentiestraal is dus $R = \sqrt{2}$.

(b) Voor $x = \sqrt{2}$, respectievelijk $x = -\sqrt{2}$, vinden we dat de reeks gelijk is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(-\sqrt{2})^{2n+1}}{2n+1} = -\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Dus het convergentiegedrag in beide eindpunten is gelijk. Merk op dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ niet absoluut convergent is, vergelijk namelijk met de harmonische reeks. De alternerende reekstest is toepasbaar, want de rij $(\frac{1}{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ is dalend en bovendien $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. Dus in beide eindpunten is de reeks voorwaardelijk convergent.

(c) De meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ voor $|t| < 1$ geeft direkt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$ voor $|t| < 1$. Termsgewijs integreren geeft (en verandert de convergentiestraal niet)

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(y)$$

Door $y = 0$ in te vullen, zien we $C = 0$. Vervang vervolgens $y = x/\sqrt{2}$, zodat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{2})^{2n+1}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(d) We kunnen de stelling van Abel gebruiken in beide eindpunten, omdat de reeks er convergent is. Dus we vinden

$$\sqrt{2}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\arctan(1) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
$$\sqrt{2}\frac{-\pi}{4} = \sqrt{2}\,\arctan(-1) = -\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

hetgeen twee keer dezelfde reeks geeft.

Opgave 4.

(a) Merk op dat deze eerste-orde differentiaalvergelijking separabel is, dus

$$\frac{dy}{dx} = y^3 x \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{y^3}\,dy = \int x\,dx \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad\Longrightarrow$$
$$y^{-2} = C - x^2 \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{C-x^2}}$$

Invullen van de beginvoorwaarde $y(0) = 1$ geeft $1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{C}}$, ofwel $C = 1$, en

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

en merk op dat de oplossing alleen gedefinieerd is voor $-1 < x < 1$.

(b) We kunnen twee verschillende methodes toepassen. Eerst zoeken we de integrerende factor

$$\frac{dy}{dx} + \cos(x)\,y = 2xe^{-\sin(x)} \quad\Longrightarrow\quad (Iy)' = I\frac{dy}{dx} + I\cos(x)\,y = I2xe^{-\sin(x)}$$

mits $I' = I\cos(x)$, ofwel $\int \frac{dI}{I} = \int \cos(x)dx$, en dus $\ln|I| = \sin(x)$, dus we nemen $I(x) = e^{\sin(x)}$, dan

$$(e^{\sin(x)}y)' = e^{\sin(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\sin(x)}\cos(x)\,y = e^{\sin(x)}2xe^{-\sin(x)} = 2x$$
$$\Longrightarrow\quad e^{\sin(x)}y(x) = x^2 + C \quad\Longrightarrow\quad y(x) = x^2e^{-\sin(x)} + Ce^{-\sin(x)}$$

We kunnen ook variatie van constantes toepassen. Dus dan zoeken we eerst de oplossing van

$$\frac{dy}{dx} + \cos(x)\,y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dy}{y} = \int -\cos(x)dx \quad\Longrightarrow$$
$$\ln|y| = -\sin(x) + C \quad\Longrightarrow\quad y(x) = Ce^{-\sin(x)}$$

Dus we proberen een oplossing $y(x) = C(x)e^{-\sin(x)}$ en dus $y'(x) = -\cos(x)C(x)e^{-\sin(x)} + C'(x)e^{-\sin(x)}$. Invullen geeft

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dx} + \cos(x)\,y = 2xe^{-\sin(x)} \quad \Longrightarrow \\ -\cos(x)C(x)e^{-\sin(x)} + C'(x)e^{-\sin(x)} + \cos(x)C(x)e^{-\sin(x)} = 2xe^{-\sin(x)} \quad \Longrightarrow \\ C'(x)e^{-\sin(x)} = 2xe^{-\sin(x)} \quad \Longrightarrow \quad C'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad C(x) = x^2 + C\end{gathered}$$

Dus vinden we dezelfde oplossing $y(x) = x^2e^{-\sin(x)} + Ce^{-\sin(x)}$.

We bepalen tot slot de constante door

$$0 = y(\pi) = \pi^2 + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\pi^2$$

en dus $y(x) = x^2e^{-\sin(x)} - \pi^2e^{-\sin(x)} = (x^2 - \pi^2)e^{-\sin(x)}$.

Opgave 5.

(a) Een constante oplossing $y(x) = C$ kan alleen als $y'(x) = 0$ voor alle x, dus als er een horizontale lijn van horizontale vectoren in het richtingenveld is. Dus PlotD.

(b) Voor de differentiaalvergelijking $y' = 0.3y^2(10 - y - x)$ zijn er horizontale pijltjes op de lijn $10 - y - x = 0$, dus dat is PlotB.

Opgave 6.

We lossen eerst de bijbehorende homogene vergelijking $y'' - 4y' + 4y = 0$ op. De karakteristieke vergelijking is $r^2 - 4r + 4 = 0$ ofwel $(r - 2)^2 = 0$, dus $r = 2$ met multipliciteit 2. Dus de algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking is

$$y(x) = e^{2x}(A + Bx)$$

Om een particuliere oplossing te vinden raden we een oplossing. Omdat de aandrijfterm geen oplossing is van de bijbehorende homogene vergelijking, proberen we een oplossing van de vorm $y(x) = (Ax + B)e^{-2x}$, dan krijgen we

$$\begin{gathered}y'(x) = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} = (A - 2B - 2Ax)e^{-2x}, \\ y''(x) = (-2A)e^{-2x} - 2(A - 2B - 2Ax)e^{-2x} = (-4A + 4B + 4Ax)e^{-2x}\end{gathered}$$

Invullen geeft

$$\begin{gathered}16xe^{-2x} = y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) \\ = (-4A + 4B + 4Ax)e^{-2x} - 4(A - 2B - 2Ax)e^{-2x} + 4(Ax + B)e^{-2x} \\ = ((-4A + 4B - 4A + 8B + 4B) + x(4A + 8A + 4A))\,e^{-2x} = ((-8A + 16B) + 16Ax))\,e^{-2x}\end{gathered}$$

dus neem $16A = 16$ ofwel $A = 1$, en dan $-8 + 16B = 0$, dus $B = \frac{1}{2}$. Dus de algemene oplossing is

$$y(x) = (x + \frac{1}{2})e^{-2x} + e^{2x}(A + Bx).$$

Het is ook mogelijk om de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking te krijgen door middel van variatie van constantes. Deze oplossingsmethode is meer werk, en voor de volledigheid werken we dat hier ook uit. Uitgaande van de oplossing van de homogene vergelijking stellen we voor de oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$\begin{gathered} y(x) = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x} \quad \Longrightarrow \\ y'(x) = \underbrace{A'(x)e^{2x} + B'(x)xe^{2x}}_{\text{stellen we } =0} + A(x)2e^{2x} + B(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) \quad \Longrightarrow \\ y''(x) = A'(x)2e^{2x} + B'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) + A(x)4e^{2x} + B(x)(4e^{2x} + 4xe^{2x}) \end{gathered}$$

Invullen in de inhomogene differentiaalvergelijking en groeperen geeft

$$\begin{gathered} 16xe^{2x} = y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \\ A(x)e^{2x}(4 - 8 + 4) + B(x)e^{2x}(4 + 4x - 4 - 8x + 4x) + A'(x)(2e^{2x}) + B'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) = \\ A'(x)(2e^{2x}) + B'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) \end{gathered}$$

(merk op dat de termen met $A(x)$ en $B(x)$ moeten wegvallen omdat e^{2x} en xe^{2x} oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking). Dus we krijgen twee vergelijkingen met de twee onbekenden $A'(x)$ en $B'(x)$;

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16xe^{-2x} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = e^{-4x} \begin{pmatrix} e^{2x} + 2xe^{2x} & -xe^{2x} \\ -2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 16xe^{-2x} \end{pmatrix} \end{gathered}$$

door de 2×2-matrix te inverteren. Dit geeft

$$\begin{aligned} B'(x) = 16xe^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad B(x) &= \int 16xe^{-4x}dx = 16x \cdot \frac{-1}{4}e^{-4x} - \int 16\frac{-1}{4}e^{-4x}dx \\ &= -4xe^{-4x} + 4\int e^{-4x}dx = -4xe^{-4x} - e^{-4x} + B \end{aligned}$$

door eenmaal partieel te integreren. Op dezelfde manier, door tweemaal partieel te integreren,

$$A'(x) = 16x^2e^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad A(x) = \int 16x^2e^{-4x}dx = 4x^2e^{-4x} + 2xe^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-4x} + A$$

Dus de oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking is

$$y(x) = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x} =$$
$$(4x^2e^{-4x} + 2xe^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-4x} + A)e^{2x} + (-4xe^{-4x} - e^{-4x} + B)xe^{2x} =$$
$$(x + \frac{1}{2})e^{-2x} + Ae^{2x} + Bxe^{-2x}$$

Dat stemt overeen met de andere methode.

Opgave 7.

(a) Vul een machtreeks rond 0 in de differentiaalvergelijking. Dus

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \text{ en } y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Invullen geeft

$$y'' = (\frac{1}{4}x^2 + 4)y \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n$$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4}a_{m-2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^m$$

Nu kunnen we coëfficiënten van gelijke machten vergelijken. De coëfficiënt van x^0, respectievelijk x^1, geeft

$$2a_2 = 4a_0, \qquad 6a_3 = 4a_1$$

en dan voor coëfficiënt van x^m voor $m \geq 2$ krijgen we

$$a_{m+2}(m+1)(m+2) = \frac{1}{4}a_{m-2} + 4a_m \quad \Longrightarrow \quad a_{m+2} = \frac{1}{4(m+1)(m+2)}a_{m-2} + \frac{4}{(m+1)(m+2)}a_m$$

(b) Merk op dat als $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, dat dan $a_{2n} \neq 0$ en $a_{2n+1} = 0$ voor alle n. Op dezelfde manier geeft $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, dat $a_{2n} = 0$ en $a_{2n+1} \neq 0$ voor alle n. Dus we vinden twee machtreeksoplossingen, een met alleen even machten en een met alleen oneven machten, aangenomen dat de convergentiestraal positief is. Dus de dimensie van de ruimte van machtreeksoplossingen is twee.

Opgave 8.

(a) We moeten oplossen met $\omega^2 = k/m$,

$$mx''(t) + kx(t) = \cos(\omega t)$$

De oplossingen van de homogene vergelijking volgen uit de karakteristieke vergelijking $r^2 + \omega^2 = 0$ ofwel $r = \pm i\omega$. De oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Omdat de aandrijfterm van de vorm is van de oplossing van de homogene vergelijking en er geen dubbele nulpunten van de karakteristieke vergelijking zijn, proberen we

$$\begin{gathered} x(t) = At\cos(\omega t) + Bt\sin(\omega t), \quad \Longrightarrow \\ x'(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - A\omega t\sin(\omega t) + B\omega t\cos(\omega t) \\ = (A + B\omega t)\cos(\omega t) + (B - A\omega t)\sin(\omega t) \quad \Longrightarrow \\ x''(t) = B\omega\cos(\omega t) - A\omega\sin(\omega t) - (A + B\omega t)\omega\sin(\omega t) + (B - A\omega t)\omega\cos(\omega t) = \\ (2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) + (-2A\omega - B\omega^2 t)\sin(\omega t) \end{gathered}$$

Invullen geeft, en gebruik maken van $\omega^2 = k/m$,

$$\begin{gathered} \cos(\omega t) = mx''(t) + kx(t) = \\ m(2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) + m(-2A\omega - B\omega^2 t)\sin(\omega t) + kAt\cos(\omega t) + kBt\sin(\omega t) = \\ \big(m(2B\omega - A\omega^2 t) + kAt\big)\cos(\omega t) + \big(m(-2A\omega - B\omega^2 t) + kBt\big)\sin(\omega t) = \\ \big(2mB\omega\big)\cos(\omega t) + \big(-2mA\omega\big)\sin(\omega t) \end{gathered}$$

Dus kies $A = 0$ en $B = \frac{1}{2m\omega}$, en we vinden de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$x(t) = \frac{1}{2m\omega}t\sin(\omega t) + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

en de eerste term zorgt ervoor dat $x(t)$ willekeurig groot (zowel in positieve als negatieve richting) kan worden.

(b) Differentieer de differentiaalvergelijking voor x twee maal, dan krijgen we

$$\begin{gathered} mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t) \\ mx'''(t) + cx''(t) + kx'(t) = f'(t) \\ mx''''(t) + cx'''(t) + kx''(t) = f''(t) \end{gathered}$$

Vermenigvuldig de eerste met K, de tweede met C en de laatste met M, en tel ze op dan krijgen we

$$\begin{gathered} 0 = Mf''(t) + Cf'(t) + Kf(t) = \\ M(mx''''(t) + cx'''(t) + kx''(t)) + C(mx'''(t) + cx''(t) + kx'(t)) + K(mx''(t) + cx'(t) + kx(t)) \\ = Mmx''''(t) + (Mc + Cm)x'''(t) + (Mk + Cc + Km)x''(t) + (Ck + Kc)x'(t) + Kkx(t) \end{gathered}$$

(c) Wrijvingsloos $C = c = 0$ en $M = 1/2$, $m = 2$, $K = 1$, $k = 8$ geeft

$$0 = x''''(t) + 6x''(t) + 8x(t)$$

Dus de karakteristieke vergelijking is $r^4 + 6r^2 + 8 = 0$, en we vinden

$$r^4 + 6r^2 + 8 = (r^2+2)(r^2+4) = (r - i\sqrt{2})(r + i\sqrt{2})(r - 2i)(r + 2i) = 0$$

Dus de algemene oplossing is dan

$$x(t) = A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t) + C\cos(2t) + D\sin(2t)$$

(d) We moeten A, B, C en D vinden, en we hebben

$$0 = x(0) = A + C$$

Op dezelfde manier vinden we

$$x'(t) = -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}t) - 2C\sin(2t) + 2D\cos(2t)$$
$$0 = x'(0) = \sqrt{2}B + 2D$$

De beginvoorwaarde $f(0) = 0$ geeft door in te vullen in

$$mx''(0) + cx'(0) + kx(0) = f(0) \quad \Longrightarrow \quad x''(0) = 0$$

Dus

$$x''(t) = -2A\cos(\sqrt{2}t) - 2B\sin(\sqrt{2}t) - 4C\cos(2t) - 4D\sin(2t)$$
$$0 = x''(0) = -2A - 4C$$

We hebben nu twee vergelijkingen met twee onbekenden voor A en C, en deze heeft als oplossing $A = 0$, $C = 0$. Tot slot, $f'(0) = 1$ geeft

$$mx'''(0) + cx''(0) + kx'(0) = f'(0) \quad \Longrightarrow \quad x'''(0) = \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

en

$$x'''(t) = -2\sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}t) - 8D\cos(2t)$$
$$\frac{1}{2} = x'''(0) = -2\sqrt{2}B - 8D$$

Dus we hebben ook twee vergelijkingen met twee onbekenden B en D

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}B - 8D = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}B + 2D = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -4D = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}B + 2D = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D = -\frac{1}{8} \\ B = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{2} \end{cases}$$

Dus de oplossing is

$$x(t) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{8}\sin(2t)$$