Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 2 NWI-NP004B
16 april 2015, 18.00–21.00

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op elk vel uw naam en studentnummer.
In geval uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ scoort u minimaal $15H/10$ voor opgave 8.

---

1. Bepaal van de volgende reeksen of ze absoluut convergent, relatief convergent of divergent zijn:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^{25}4^n}{\sqrt{n!}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+4}{3n^2\sqrt{n}+4n\sqrt{n}+2n+12}$$

2. Beschouw de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

   (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.

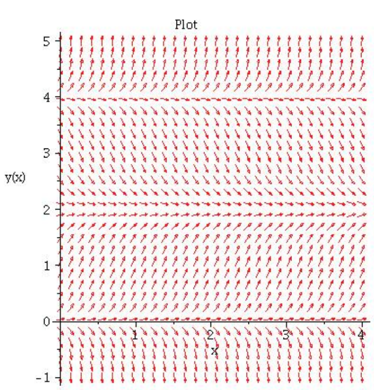
   (b) Bepaal het convergentiegedrag van de reeks in de randpunten van het convergentie-interval.

   (c) Bepaal de functie die deze machtreeksontwikkeling heeft.

   (d) Bepaal de waarden van de reeks in de randpunten van het convergentie-interval in geval de reeks convergent is in het betreffende randpunt.

3. (a) Bepaal de oplossing van $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x e^{-y(t)}dt$.

   (b) Bepaal de oplossing van $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ met beginwaarde $y(1) = 0$.



4. Het richtingenveld van de eerste orde differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx}(x) = y^3(x) - 6y^2(x) + 8y(x)$ is hiernaast gegeven.

   (a) Voor welke waarden van C is $y(x) = C$ een constante oplossing van de differentiaalvergelijking?

   (b) Geef voor elk van de mogelijkheden uit (a) aan voor welke $y_0 \in \mathbb{R}$ geldt dat de oplossing van de differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde $y(0) = y_0$ voldoet aan $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = C$.

5. De oplossing van het beginwaarde probleem $y'' + 4y' + 4y = 16x^2e^{-2x}$ met $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ wordt gegeven door[1]
   (a) $y(x) = e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 6x^2e^{-2x}$ (b) $y(x) = e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 2x^3e^{-2x}$
   (c) $y(x) = e^{-2x} + 2xe^{-2x} + x^4e^{-2x}$ (d) $y(x) = e^{-2x} + 2xe^{-2x} + \frac{3}{5}x^5e^{-2x}$

6. Beschouw $ay'' + by' + cy = 0$ met $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Laat zien dat elke oplossing y voldoet aan $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

7. Beschouw de differentiaalvergelijking $xy'' + (2 - x)y' - y = 0$. Veronderstel dat de machtreeks $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is.
   (a) Leid een recurrente betrekking af voor de coëfficiënten a_n.
   (b) Bepaal de oplossing(en) van de recurrente betrekking van (a).
   (c) Wat is de convergentiestraal van de oplossing die u bij (b) heeft verkregen?

8. [2] Zij $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ de machtreeksontwikkeling voor de exponentiële functie.
   (a) Laat zien dat $e = e^1$ voldoet aan $2 < e < 3$. (*Hint.* $n! \geq 2^{n-1}$ voor $n \geq 1$.)
   (b) Veronderstel N en M gehele getallen met $N \geq 1$. Laat zien dat

$$N!\left(\frac{M}{N} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right)$$

   een geheel getal is.
   (c) Gebruik de reeks voor e om te laten zien dat voor $N \geq 2$

$$0 < N!\left(e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) < 1$$

   (*Hint.* Gebruik $\frac{N!}{n!} < (N+1)^{N-n}$ voor $n > N+1$, en gebruik de meetkundige reeks.)
   (d) Laat zien dat e geen breuk is.

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	Gratis	Totaal
Punten	10	8	14	14	8	14	7	15	10	100

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel huiswerkcijfer wordt meegenomen in de beoordeling van opgave 8.

[1] Alleen het antwoord telt. U hoeft geen argumentatie te geven.
[2] Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

We kijken steeds eerst of de reeks absoluut convergent is.

Voor de eerste reeks passen we het quotiëntenkenmerk toe, en we kijken naar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{25}4^{(n+1)}}{\sqrt{(n+1)!}}|}{|(-1)^n\frac{n^{25}4^n}{\sqrt{n!}}|} = \lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^{25}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 < 1$$

dus de reeks is absoluut convergent.

Voor de laatste reeks stellen we

$$a_n = \frac{n^2+2n+4}{3n^2\sqrt{n}+4n\sqrt{n}+2n+12}, \qquad b_n = \frac{n^2}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

Merk op dat $a_n \geq 0$ en dat $b_n \geq 0$. Dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent of divergent. Dan weten we uit de p-reeks (of via het integraalkenmerk) dat $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent is, $0 < p = \frac{1}{2} < 1$. Verder geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2n+4}{3n^2\sqrt{n}+4n\sqrt{n}+2n+12}}{\frac{1}{n^{1/2}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{n}+2n\sqrt{n}+4\sqrt{n}}{3n^2\sqrt{n}+4n\sqrt{n}+2n+12} \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^{-1}+4n^{-2}}{3+4n^{-1}+2n^{-3/2}+12n^{-5/2}} = \frac{1}{3}$$

Dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent dan en slechts dan als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent is (vergelijkingskenmerk). Dus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent.

Opgave 2.

(a) Om de convergentiestraal te bepalen passen we het quotiëntenkenmerk toe.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}|}{|\frac{x^n}{n(n-1)}|} = \lim_{n\to\infty} |x|\frac{n-1}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1+1/n} = |x|$$

Dus als $|x| < 1$ dan is de reeks absoluut convergent, en voor $|x| > 1$ is de reeks divergent. De convergentiestraal is dus $R = 1$.

(b) Voor $x = 1$, respectievelijk $x = -1$, vinden we dat de reeks gelijk is

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

Als we vergelijken met de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dan zien we dat beide reeksen absoluut convergent zijn.

(c) Als we de reeks differentiëren (en dan verandert de convergentiestraal niet) krijgen we

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

(stel $m = n-1$). Nogmaals differentiëren geeft

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mx^{m-1}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1} = \sum_{p=0}^{\infty} x^p = \frac{1}{1-x}$$

(en nog steeds convergentiestraal 1). Dus we vinden

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_{t=0}^{x} = -\ln(1-x)$$

(en dan is inderdaad het linkerlid en en het rechterlid gelijk aan 0 voor $x = 0$). Nogmaals integreren geeft

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)} &= \int_0^x -\ln(1-t)\,dt = (1-t)\ln(1-t)\Big|_{t=0}^{x} - \int (1-t)\frac{-1}{1-t}\,dt \\ &= (1-x)\ln(1-x) + \int_0^x dt = (1-x)\ln(1-x) + x\end{aligned}$$

(d) We kunnen de stelling van Abel gebruiken in beide eindpunten, omdat de reeks er convergent is. Dus we vinden

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x \downarrow -1} (1-x)\ln(1-x) + x = 2\ln(2) - 1,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{x \uparrow 1} (1-x)\ln(1-x) + x = 1$$

door gebruik te maken van de standaardlimiet $\lim_{x\downarrow 0} x\ln(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0$, met $y = 1/x$.

Opgave 3.

(a) De integraalvergelijking $y(x) = 3 + \int_0^x e^{-y(t)} dt$ geeft $y(0) = 3$, en differentiëren geeft een separabele differentiaalvergelijking

$$y' = e^{-y} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{e^{-y}} = \int dx \quad \Longrightarrow \quad \int e^y\,dy = x + C \quad \Longrightarrow$$
$$e^y = x + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \ln(x + C)$$

(We moeten een oplossing hebben voor positieve x.) Invullen van de beginvoorwaarde geeft $3 = y(0) = \ln C$, ofwel $C = e^3$, en $y(x) = \ln(x + e^3)$, gedefinieerd voor $x \in (-e^3, \infty)$.

(b) We kunnen twee verschillende methodes toepassen. Eerst zoeken we de integrerende factor voor $xy' + (1-x)y = e^{2x}$, dus voor

$$(Iy)' \stackrel{?}{=} Iy' + I\frac{(1-x)}{x}y = I\,x^{-1}e^{2x}$$

hebben we nodig $I' = I\frac{(1-x)}{x}$ ofwel

$$\begin{aligned}\int \frac{dI}{I} = \int \frac{(1-x)}{x}dx = \int \frac{1}{x} - 1dx \quad &\Longrightarrow \\ \ln(I) = \ln(x) - x = \ln(x) - \ln(e^x) = \ln(xe^{-x}) \quad &\Longrightarrow I(x) = xe^{-x}\end{aligned}$$

Dan wordt de eerste orde differentiaalvergelijking

$$(xe^{-x}y)' = xe^{-x}x^{-1}e^{2x} = e^x \quad \Longrightarrow \quad xe^{-x}y(x) = e^x + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{e^{2x}}{x} + \frac{Ce^x}{x}$$

We kunnen ook variatie van constantes toepassen. Dus dan zoeken we eerst de oplossing van

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{dx} + (1-x)\,y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x-1}{x}dx = \int 1 - \frac{1}{x}dx \quad &\Longrightarrow \\ \ln|y| = x - \ln(x) + C = \ln(e^x x^{-1}) + C \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = C\frac{e^x}{x}\end{aligned}$$

Dus we proberen een oplossing $y(x) = C(x)\frac{e^x}{x}$ en dus $y'(x) = C(x)\frac{(x-1)}{x^2}e^x + C'(x)\frac{e^x}{x}$. Invullen geeft

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{dx} + (1-x)\,y = e^{2x} \quad &\Longrightarrow \\ C(x)\frac{(x-1)}{x}e^x + C'(x)e^x + (1-x)C(x)\frac{e^x}{x} = e^{2x} \quad &\Longrightarrow \\ C'(x)e^x = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad C'(x) = e^x \quad &\Longrightarrow \quad C(x) = e^x + C\end{aligned}$$

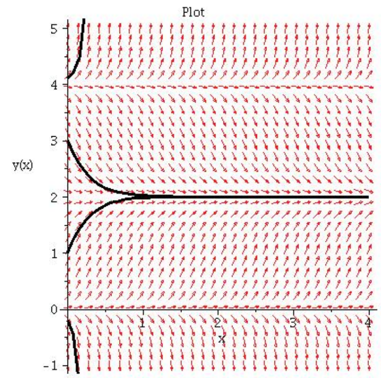
Dus vinden we dezelfde oplossing $y(x) = \frac{e^{2x}}{x} + C\frac{e^x}{x}$.

We bepalen tot slot de constante door

$$0 = y(1) = e^2 + Ce \quad \Longrightarrow \quad C = -e$$

en dus $y(x) = \frac{e^{2x}}{x} - e\frac{e^x}{x} = e^x\frac{e^x - e}{x}$. Merk op dat het domein van y gelijk is aan $(0, \infty)$.

Opgave 4.



Figuur 1: Bij opgave 4 oplossingen met beginwaarde $y(0)$.

(a) $\frac{dy}{dx}(x) = y^3(x) - 6y^2(x) + 8y(x)$ heeft een constante oplossing $y(x) = C$, dan $y'(x) = 0$ en C moet voldoen aan

$$0 = C^3 - 6C^2 + 8C = C(C^2 - 6C + 8) = C(C-4)(C-2)$$

dus dat kan voor $C = 0$, $C = 2$ en $C = 4$, en dat blijkt in het richtingenveld, omdat ter hoogte van deze waarden van y alle pijlen horizontaal lopen.

(b) In het plaatje ziet u de pijlen weglopen van de constante oplossingen $y(x) = 0$, $y(x) = 4$. De pijlen lopen wel naar de constante oplossing $y(x) = 4$. Maar dat kan alleen als de beginwaarde $y(0) \in (0, 4)$ zit. Dus de conclusie is (zie ook Figuur 1):

- Voor de constante oplossing $y(x) = 0$ geldt alleen als $y(0) = 0$ dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- Voor de constante oplossing $y(x) = 4$ geldt alleen als $y(0) = 4$ dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 4$.
- Voor de constante oplossing $y(x) = 2$ geldt dat als $y(0) \in (0, 4)$ dan $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$.

Opgave 5.

Antwoord (c) is correct. Om dat in te zien merk op dat de karakteristieke vergelijking van de homogene differentiaalvergelijking $y'' + 4y' + 4$ gelijk is aan $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$, en dus is $r = -2$ een dubbel nulpunt van de karakteristieke vergelijking. Omdat de aandrijfterm ook e^{-2x} heeft, moet je als particuliere oplossing proberen $y_p(x) = x^2e^{-2x}(A + Bx + Cx^2)$ met $C \neq 0$.

Opgave 6. Voor een tweede orde differentiaalvergelijking moeten we de bijbehorende karakteristieke vergelijking oplossen, dus $ar^2 + br + c = 0$. Deze heeft als oplossingen

$$r_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}, \qquad \frac{-b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Als $b^2 - 4ac < 0$, dan is de algemene oplossing van de vorm

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right)$$

met $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$. Dan geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, omdat de exponentiële functie een negatieve macht heeft en de andere termen begrensd zijn.

Als $b^2 - 4ac = 0$, dan hebben we een dubbel nulpunt van de karakteristieke vergelijking, en dus is de algemene oplossing

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}(A + Bx)$$

en ook hier zorgt de exponentiële functie met een negatieve macht voor $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Als $b^2 - 4ac > 0$, dan hebben we twee reële nulpunten. Merk op dat $r_2 < 0$ en dat $b^2 - 4ac < b^2$ en dus

$$r_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} < \frac{-b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2} = \frac{-b}{2a} + \frac{b}{2a} = 0$$

Dus ook $r_1 < 0$, dus de algemene oplossing is

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

en omdat $r_1 < 0$ en $r_2 < 0$ volgt dat de exponentiële functie met een negatieve macht zorgt voor $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Opgave 7.

(a) Vul een machtreeks rond 0 in de differentiaalvergelijking. Dus

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \text{ en } y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Invullen geeft

$$\begin{gathered} 0 = xy''(x) + (2-x)y'(x) - y(x) = \\ \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{gathered}$$

Nu kunnen we coëfficiënten van gelijke machten vergelijken. De coëfficiënt van x^0 geeft

$$2a_1 - a_0 = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2}a_0$$

en dan voor coëfficiënt van x^n voor $n \geq 1$ krijgen we

$$a_{n+1}n(n+1) + 2a_{n+1}(n+1) - na_n - a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad (n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n$$
$$\Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{1}{n+2}a_n.$$

Dus $a_0 = a$ kunnen we willekeurig kiezen, en dan liggen de andere coéfficiënten vast, namelijk $a_1 = \frac{1}{2}a$, en $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}a_n$.

(b) We zien dat door te itereren

$$a_n = \frac{1}{n+1}a_{n-1} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n}a_{n-2} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}a_{n-3} = \cdots = \frac{1}{(n+1)n(n-1)\cdots 3}a_1$$
$$= \frac{1}{(n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2}a = \frac{1}{(n+1)!}a$$

en deze formule klopt ook voor $n = 1$, en $n = 0$. Dus

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}a = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

(c) De convergentiestraal is ∞, want

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}a|}{|\frac{x^n}{(n+1)!}a|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$$

voor elke x. Dus de reeks is convergent voor elke x.

Opmerking. De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is $y(x) = A\frac{1}{x} + B\frac{e^x}{x}$, en alleen voor $A + B = 0$ heeft dit een machtreeksontwikkeling rond $x = 0$. Dus de machtreeksoplossing is $y(x) = a\frac{e^x-1}{x}$, hetgeen ook afgelezen kan worden aan de gevonden machtreeksoplossing.

Opgave 8.

(a) Merk op dat

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots$$

Omdat alle termen positief zijn, volgt

$$2 = 1 + 1 < e = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} < 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + (\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1) = 3$$

omdat $n! > 2^{n-1}$ voor $n > 2$ en $2! = 2^{2-1}$ en de meetkundige reeks. In het algemeen, voor $n = 2$ is er gelijkheid, en voor $n \geq 3$ krijgen we met behulp van inductie op n

$$(n+1)! = (n+1)\,n! > (n+1)2^{n-1} > 22^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$$

(b) Voor $N = 1$ is

$$N!\left(\frac{M}{N} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) = 1(M - (1+1)) = M - 2$$

een geheel getal. Veronderstel $N \geq 2$. Merk op dat

$$N!\left(\frac{M}{N} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) = M(N-1)! - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} = M(N-1)! - \sum_{n=0}^{N}(n+1)\cdots N$$

geheel is als som van gehele getallen.

(c) Bekijk

$$N!(e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}) = N! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!} > 0$$

want alle termen zijn positief. Merk op dat voor $n = N + 1$

$$\frac{N!}{n!} = \frac{1}{N+1}$$

en dat voor $n \geq N + 2$ geldt

$$\frac{N!}{n!} = \underbrace{\frac{1}{N+1}\frac{1}{N+2}\cdots\frac{1}{n}}_{n-N \text{ termen}} < \underbrace{\frac{1}{N+1}\frac{1}{N+1}\cdots\frac{1}{N+1}}_{n-N \text{ termen}} = \frac{1}{(N+1)^{N-n}}$$

Dus

$$N!(e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{N+1}\right)^{n-N}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N+1}\right)^{k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} - 1 = \frac{N+1}{N} - 1 = \frac{1}{N} < 1$$

voor $N \geq 2$.

(d) Veronderstel dat $e = \frac{M}{N}$ een breuk is. Uit (a) weten we dat e niet een geheel getal is, dus $N \geq 2$. Uit (b) weten we dat

$$N!\left(\frac{M}{N} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) = N!\left(e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right)$$

een geheel getal is, en uit (c) weten we dat dit gehele getal moet liggen tussen(!) 0 en 1. Tegenspraak! Dus e is geen breuk en daarmee irrationaal.